الجديد في

الأساليب الكمية و بحوث العمليات



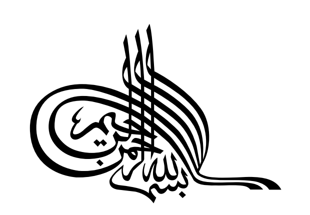
الدكتورة

سهيلة عبدالله سعيد





WWW.daralhamed.net



الجديد في الأساليب الكمية

وبحوث العمليات



رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2006/5/1334)
658.403
* سعيد، سهيلة عبد الله
* الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات/ سهيلة عبدالله سعيد .
عمان: دار ومكتبة الحامد، 2007.
( ) ص
* ر.إ.: (2006/5/1334)
* **الواصفات:** /بحوث العمليات // اتخاذ القرارات/

❖ تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

* رقم الإجازة المتسلسل لدى دائرة المطبوعات والنشر 2006/5/1461
* (ردمك) ISBN 9957-32-271-0



دار الحامد للنشر والتوزيع

شفابدران – شارع العرب مقابل جامعة العلوم التطبيقية
هاتف: 5231081 فاكس 5235594- 009626
ص.ب (366) الرمز البريدي (11941) عمان – الأردن

الجديد في
الأساليب الكمية
وبحوث العمليات

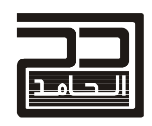
New in
Quantitative Approach
& Operations Research

إعداد

د. سهيلة عبد اللـه سعيد

الطبعة الأولى

2007م



الإهـــــــــداء

إلى بلدي كردستان

الذي ترعرعت في أحضانه

ونهلت من معينهِ

إلى من أموت ولساني رطب بذكر الـلـه

إلى روح والدي العزيز طيب الـلـه مثواه

إلى من أعطتني من معين حبها ووفائها أمي الحنون

إلى شقيقاتي وشقيقي حباً واعتزازاً

إلى زوجي ورفيق دربي

إلى مهجة فؤادي وأحلام عمري ابنتي مريم

المحتويات

الفصل الخامس

الفصل السادس

الفصل السابع

الفصل الثامن

Introduction

Operation Research, characterized by a vailability and application of mathematical and quantitative models for purposes of analyzing and solving management problems.

Most of the theoretical literature in, and practical applications of this new dimension have come from pioneers in the field of O.R and management science. They realized that the descriptive aspects of management scientists had already reached plateau of development, they proceded to evolve theoretical framework which has given new life and vigor to this field. We have access to number of powerful optimizing methods and techniques which are helpful in solving a wide range of business and science and management problem.

Linear programming is a subclass of allocation models, it is a method of allocating scarce resources to competing activities under the assumption of linearity. In linear programming problems,both the objective function and constraints are assumed to be linear. Which is being used either maximize or minimize a given objective function.

The purposes of this book, is to identify the place of linear programming problems within the broad field of O.R to provide a clear understanding of the simplex algorithm through the solution of linear programming problem by various methods and to explain

the relationship between the simplex, transportation and assignment models.

This book has been written primarily for the beginning student in and I feel it provides a basic understanding of the fundamental concepts of O.R in general. Indeed without a good understanding of linear programing theory, one can only acquire a superficial knoledge of such techniques as networsk, integer programming, and queen theory.

May 2006

مقدمة

نظراً للإقبال الشديد على استخدام الأساليب الكمية وبحوث العمليات في شتى المجالات والتخصصات العلمية باعتبارها وسيلة مساعدة في اتخاذ القرارات الكمية باستخدام الطرق العملية الحديثة في شتى جوانب الحياة الاقتصادية والإدارية والعلمية والهندسية وغيرها، تعتبر بحوث العمليات فن وعلم في آن واحد فهي تتعلق بالتخصيص الكفؤ للموارد المتاحة وكذلك قابليتها الجيدة في عكس مفهوم الكفاءة والندرة في نماذج رياضية تطبيقية وكذلك لها القابلية على اشتقاق طرق حسابية سلسة لحل مثل هذه النماذج الرياضية.

يعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية التي أحرزت نجاحاً واسعاً وخاصةً في مجال العلوم الإدارية لأنها تبحث عن القواعد والأسس الجديدة للعمل الإداري، وذلك للبلوغ إلى أفضل المستويات من حيث الجودة الشاملة ومقاييس المواصفات العالمية (الأيزو) والإنتاج الآني وغير ذلك.

وأن من أحد النتائج المتوقعة في العلوم الإدارية هي زيادة القدرة الإنتاجية للمصنع والمؤسسة وحتى الحقول الزراعية والحيوانية وبالتالي ظهور مشاكل أخرى في مجالات الإنتاج والتسويق والنقل والإدارة والتمويل مما يؤدي إلى ظهور حاجة ملحة لبناء قاعدة علمية متينة.

وإن لعلم بحوث العمليات تاريخ ليس بالقديم ويعتبر من العلوم التي ساهمت في انتصار القوات البرية والجوية البريطانية إبان الحرب العالمية الثانية والفضل الكبير إلى العالم G. Dantzig الذي اكتشف خوارزمية Simplex ذات الإمكانيات المتقدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية ومن ثم توالت الإنجازات العلمية الأخرى مثل CPM و PERT في تطوير شبكات الأعمال وتقييم المشروعات.

ورغبة في إغناء المكتبة الجامعية والعربية بموضوعات هذا العلم وتوفير كتاب علمي لطلبة الدراسات الجامعية لمختلف الاختصاصات قمت بوضع هذا الكتاب والذي يتضمن فصول متعددة.

ويتضمن هذا الكتاب على فصول عديدة منها ما يتعلق بالبرمجة الخطية وخوارزمياتها وعلاقتها بالبرمجة الثنائية وتحليل الحساسية ومن ثم إيجاد قاعدة معينة لحل برمجة الأعداد الصحيحة من حيث مفهومها وأهميتها والأسلوب الرياضي لها واختلافها عن البرمجة الخطية. ومن جانب آخر تطرقنا إلى موضوعات في مشاكل النقل والتخصيص وكذلك تناول هذا الكتاب جانباً من التطبيقات المهمة في إدارة المشاريع الإدارية والهندسية وغيرها بعد التطرق إلى أسلوب تقييم ومراجعة المشاريع والسيطرة عليها وكيفية تقليص وتخفيض الموارد والوقت المستخدم في عملية الإنجاز.

وغيرها من المواضيات المهمة، وقد تم إدراج وحل بعض الأمثلة والتطبيقات التوضيحية والمأخوذة من واقع الحياة العملية.

وقد بذلت قصارى جهدي لإنجاز هذا الكتاب بشكل يحقق هدفه.

فيسرني أن أضع بيني أيدي طلبتنا الأعزاء وزملائي التدرسيين هذا الجهد المتواضع تجاوباً مع حاجة الطلبة الأعزاء أينما وجدوا.

أستميح القارئ الكريم عذراً عما قد يجده من هفوات غير مقصودة والعصمة لله، وفوق كل ذي علم عليم.

وأملي أن أكون قد وفقت في أداء واجبي وحققت ما يمكن أن يغني جزءاً من الفائدة المتوخاة والله من وراء القصد وهو يهدي السبيل، ولا يفوتني أن أشكر السادة دار الحامد للنشر متمثلة بجميع الموظفين وكذلك إلى السيد أحمد فايز الزعبي لما بذله من جهود في طباعة هذا الكتاب وإخراجه بأفضل ما يكون.

إعداد

أيار 2006

الفصل الأول

الأساليب الكمية

Quantitative Approach

الفصل الأول

الأساليب الكمية

Quantitative Approach

مقدمة:

من أجل بيان دور وأهمية الأساليب الكمية Quantatitative methods في عملية اتخاذ القرارات Decision maker كأساس لتوضيح المشكلة من حيث المدخل الكمي والمعبّر عنه بالأرقام والمعادلات الرياضية والتي تسمى بالنموذج الرياضي Mathematical Model.

يمكن تعريف الأساليب الكمية، بأنها مجموعة من الأدوات tools أو الطرق methods التي تستخدم من قبل متخذ القرار Decision maker لمعالجة مشكلة معينة أو لترشيد القرار الإداري management decision المتخذ بخصوص حالة معينة والمفروض توفر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة problem مثلاً في مجال إدارة الإنتاج، يتم تحديد المستلزمات من المواد الأولية والأيدي العاملة وأية مدخلات أخرى لعملية الإنتاج، مع ذكر ماهية المخرجات، هذا من جانب ومن جانب آخر يتطلب كيفية استخدام هذه البيانات والموارد وتطبقها لتحديد الفرضيات والعوامل المؤثرة بشكل مباشر أو غير مباشر.

ويمكن تعريفها أيضاً بأنها النماذج الرياضية أو الكمية التي من خلالها يتم تنظيم كافة مفردات المشكلة الإدارية أو الاقتصادية والتعبير عنها بعلاقات رياضية من معادلات ومتباينات وتفرض شروط للمتغيرات المستخدمة لبناء تلك المعادلات أو المتباينات equation or inequalities ويتم دعم هذه المعادلات بالبيانات اللازمة (الموارد المتاحة) Resources allocation والتي يتصف قسم منها في كونها ثوابت Constant والبعض الآخر متغيرات Variables مما يناسب طبيعة المشكلة. هذا يعني أن النموذج الرياضي يعتبر الوسيلة أو الأسلوب التي تتم معالجة المشكلات

من خلالها، ومن بعد ذلك تجري عليها التحليلات الملائمة والمناسبة حسب طبيعة المشكلة، وبالتالي يتم التوصل إلى الحل المطلوب.

ومن خصائص الأساليب الكمية أنها طريقة لحل المشاكل التي تعالج باستخدام بحوث العمليات وهذه تتراوح في مشاكل صغيرة مثلاً وضع خطة إنتاجية لمنشأة صناعية صغيرة، ومشاكل كبيرة مثل وضع خطة طويلة الأمد تشمل الأمور المالية والتسويقية والتصنيعية وتبدأ أغلب المشاريع بمشكلة ليس لها حل واضح.

لذا يمكن القول أن بحوث العمليات تلعب دوراً مهماً لدراسة أنواع المشاكل ومنها المتعلقة بإدارة الأعمال من خلال النظر للمشكلة من زاوية كمية ومن ثم صياغتها حسب الوظائف المتاحة. وتتضح أهمية بحوث العمليات والأساليب الكمية لدراسة الأمور الكمية في إدارة الأعمال من خلال الأمور التالية:

1- المساهمة في تقريب المشكلة الإدارية إلى الواقع.

2- صياغة نماذج رياضية معينة تعكس مكونات المشكلة.

3- عرض النموذج في مجموعة من العلاقات الرياضية وإعطاء فرص مختلفة (بدائل) Alternative لعملية اتخاذ القرارات وبما يساهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها.

4- تطبيق هذه النماذج الرياضية في المستقبل عندما تواجهنا مشكلة مماثلة.

1-2 مفهوم الأساليب الكمية Quantitative Methods:

كما ذكرنا سابقاً أن الأساليب الكمية هي أسلوب رياضي يتم من خلاله معالجة المشاكل الاقتصادية والإدارية والتسويقية بمساندة الموارد المتاحة من البيانات والأدوات والطرق التي تستخدم من قبل متخذي القرار لمعالجة المشكلات.

تتصف الأساليب المستخدمة في معالجة المشاكل بأن بعضها ذات طابع احتمالي والبعض الآخر ثابتة Constant أو ساكتة (Static) والبعض الآخر متغيرة (Variables) وبشكل مستمر Dynamic حسب طبيعة العامل الزمني.

لذا، وضمن منهج الكمي للأساليب الكمية يمكن التمييز بين الأنواع المختلفة والمستخدمة من قبل متخذي القرار في مجال الترشيد الإداري أو لغرض حل مشكلة معينة في إحدى مجالات إدارة المنشأة من أجل الوصول إلى الحلول الممكنة والمطلوبة ومن هذا الجانب يمكن أن تقسم الحلول المطلوبة إلى:

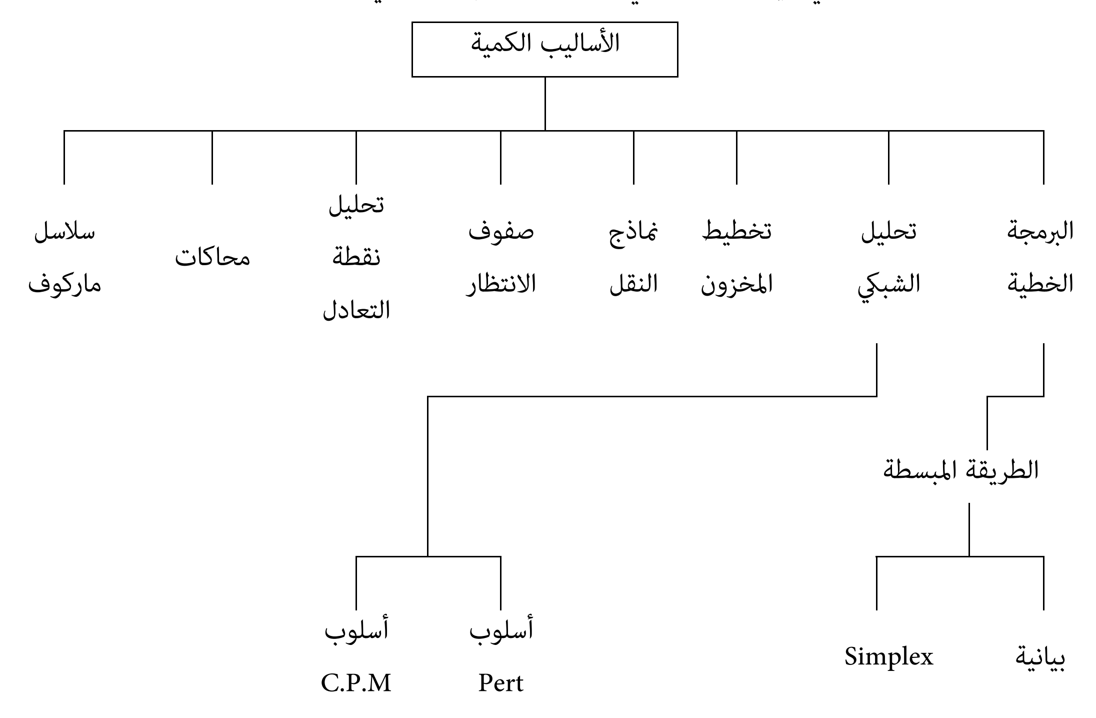
1- الحل الممكن Feasible Solution.

2- الحل الأفضل Best Solution.

3- الحل الأمثل Optimal Solution.

وكل هذه التسميات المختلفة يمكن جمعها تحت عنوان بحوث العمليات Operation Research (O.R) إضافةً إلى الأساليب الرياضية والإحصائية المستخدمة ضمن هذا العنوان من برمجة خطية وشبكات عمل ونماذج تخزين ونظرية القرارات وإلى آخره من المشاكل التي تعالجها بحوث العمليات وهذا يعني أن الأساليب الكمية هي جزء لا يتجزأ من بحوث العمليات.

والمخطط التالي يبين الوحدات التي تشملها الأساليب الكمية في بحوث العمليات:



شكل (1) أنواع الأساليب المستخدمة ضمن بحوث العمليات

1-3 خطوات عملية اتخاذ القرارات:

عملية اتخاذ القرار يعتبر جوهر العملية الإدارية والإنتاجية بشكل عام، حيث يصب الاهتمام دائماً عليه ونعني بعملية اتخاذ القرار بأنها مجموعة من الخطوات التي يقوم بها متخذ القرار من أجل الوصول إلى الهدف الذي يسعى من أجله. أما خطوات اتخاذ القرار وهي:

1- تحديد المشكلة التي تتطلب اتخاذ القرار بصددها، أما عناصرها هي: الهدف objective والمتغيرات variables.

2- تحديد الهدف المطلوب.

3- جمع البيانات اللازمة للمشكلة مع تطوير البدائل المتوفرة.

4- التحليل والمقارنة بين البدائل المتوفرة.

5- تطبيق الأساليب اللازمة لاختيار البديل الملائم.

6- تنفيذ العمل الذي وقع عليه الاختيار.

7- مراقبة عملية التنفيذ وإجراء التعديلات اللازمة.

وبالرغم من اعتماد الخطوات التي ذكرت سابقاً هناك ثغرات معينة قد تحدث في عملية اتخاذ القرار وهذا ناتج إما من البيانات أو الأساليب المستخدمة في حل تلك المشاكل أو أن يكون سبب هذه الفجوة عائد إلى متخذ القرار نفسه وهناك أسباب أخرى كثيرة.

1-4 أنواع القرارات:

هناك أنواع مختلفة من القرارات والمتخذة من قبل المدراء أومن جهة متخذي القرار وهذه الأنواع:

أولاً: أخذ القرار من تحقيق الهدف أو النتائج المتوصل لها وهذه تمثل:

1- القرار الأمثل Optimal Decision.

2- القرار الأفضل Best Decision.

3- القرار الممكن Feasible Decision.

ثانياً: هناك أنواع أخرى من القرارات التي تعتمد على توفر عامل التأكد أو وجود نوع من الاحتمالية في تحقيق الأهداف التي يسعى إليها متخذ القرار. ويمكن تحديدها بالأنواع التالية:

1- اتخاذ القرار في حالة التأكد التام::

وهذه أبسط أنواع القرارات التي تواجه متخذ القرار حيث يستطيع فيها تحديد نتائج كل بديل من البدائل المتوفرة بشكل مؤكد والسبب يعود إلى توفر البيانات Data والمعلومات اللازمة حسب طبيعة المشكلة. وهذه البدائل هي أساليب بيد متخذ القرار لتقييم البدائل المختلفة واختيار البديل الأفضل (وتسمى حالة طبيعية 100%).

2- اتخاذ القرار في حال عدم التأكد (المخاطرة):

تعرف هذه الحالة أيضاً بعملية اتخاذ القرار تحت ظروف الخطر (Risk)، حيث يتصف القرار في هذه الحالة بأن متخذ القرار على معرفة تامة باحتمالية حدوث أي حالة من الحالات والتي تؤثر على بدائل القرار المختلفة وبموجب هذا سوف يبحث متخذ القرار عن أعلى قيمة متوقعة يمكن الحصول عليها في ظل احتمالية حدوث كل حالة من الحالات. وهناك معايير يجب أن يستخدمها متخذ القرار منها معيار القيمة المالية المتوقعة Expected Monetary Value أو معيار القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة Expected Perfect information، وكذلك معيار خسارة الفرص الضائعة Expected opportunity loss، لذا يعتبر القرار في حالة المخاطرة تطبيقاً مباشراً لنظرية الاحتمالات.

3- اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد تام:

في هذه الحالة يكون متخذ القرار غير متأكد من احتمالات الأحداث المتعددة وذلك لعدم وجود تجارب في الماضي يمكن متخذ القرار من تقدير هذه الاحتمالات فمثلاً إن المنشآت الإنتاجية أو الخدمية التي تعمل في ظل النظم الاقتصادية تتسم

فيها الأسواق كونها غير متوازنة unbalance ويسـودها الاضـطراب مـن حيـث علاقـة العـرض supply والطلب demand، إضافة إلى كونها مفتوحة أمام الصراعات والمنافسات وذلك من أجـل الهيمنـة عـلى أكبر حصة سوقية أو الانفراد بعملية إنتـاج سـلعة معينـة، لهـذا فـإن المنشـآت الداخلـة في مثـل هـذه الأسواق تتسم قراراتها بحالة عدم تأكد وهذا يعـود إلى أن البيانـات والمعلومـات المتاحـة حـول نتـائج القرار غير كافية، وخاصة فيما يتعلق باحتمالات تحقق كل حالة من حالات الطبيعة.

وفي مثل هذه الحالة على متخذ القرار (الجديد) اتخاذ قـرار معـين يعتمـد عـلى أحـد المعـايير المختلفة والتي تساعد متخذي القرار Decision makers على تحديـد البـديل الأفضـل واتخـاذ القـرار الملائم أيضاً، ومن هذه المعايير:

1- معيار أقصى الأقصى MaxiMax:

حيث يقوم متخذ القرار باختبار البدائل التي تحقـق لـه أكـبر عائـد مـادي، أي اتخـاذ البـديل المتفائل optimistic.

2- معيار أقصى الأدنى MaxiMin:

وفي هذه الحالة يتعرف متخـذ القـرار بنـوع مـن التشـاؤم pessimistic ويقـوم باختيـار أقـل الفوائد.

3- معيار أدنى أقصى MiniMax:

ففي هذه الحالة يتعرض متخذ القرار بالتفاؤل الحذر أي باختيار أفضل النتائج best resultes لكل بديل ثم يقوم باختيار أقل هذه النتائج.

4- معيار أدنى الأدنى MiniMin:

هنا يتصرف متخذ القرار بدرجة كبيرة من التشاؤم وهذه تكون في حالة كبيرة من عدم التأكـد بالنسبة إلى متخذ القرار فيختار أقل عائد لكل بديل.

5- معيار الندم Regret Criteria:

اقترح العالم سافاج Savag معياراً يرتكز على الدراسات النفسية وأطلق عليه معيار الأسبق أو الندم ويشير Savag إلى أن متخذ القرار بعد اتخاذ للقرار والحصول على عائد معين قد يشعر بالندم لأنه يعلم في تلك الفترة بحالة الطبيعة التي حدثت وبالتالي فهو يتمنى لو كان قد اختار بديلاً آخر غير الذي تم اختياره. وقد توصل العالم Savag إلى أن متخذ القرار لا بد وأن يبذل جهده لتقليل ندمه.

ومن جانب آخر على متخذي القرار مراجعة بعض النظريات المختلفة والتي يمكن استخدامها بالاستعانة ببعض الأساليب الكمية التي تساهم في اتخاذ القرار العادي والأمثل ومن هذه النظريات (سوف نذكر قسماً منها دون الدخول إلى تفاصيلها) فالأساليب هي:

1- نظرية بايز Bay's theory.

2- نظرية المنفعة Utility theory.

3- شجرة القرارات Decision tree.

4- نظرية الألعاب Game theory وهذه سوف نتطرق لها لاحقاً.

الفصل الثاني

مقدمة في البرمجة الخطية

Introduction to Linear Programming

الفصل الثاني

مقدمة في البرمجة الخطية

Introduction to Linear Programming

Quantitative Approach

2-1 المقدمة Introduction:

Linear Programming is a subclass of allocation Models. It is a method of allocating scarce resources to competing activities under the assumptions of linearity. Both the objective function and the Constraints are assumed to be linear. Within the framework of such allocation problems, linear programming is used either to maximize or to minimize a given objective function.

Linear Programming is only one aspect of what has been called a "systems" approach to management where in all programs are designed and evaluated in terms of their ultimate effects on the realization of business. This approach recognizes the multiplicity of objectives in decision making and identifies the dangers of subotimization.

تحتل البرمجة الخطية Linear Programming في الوقت الحاضر مركزاً مرموقاً في مجال بحوث العمليات Operation Research ولها تطبيقات واسعة، وتم تطوير الأساليب الفنية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية بعد الحرب العالمية الثانية، حيث تم تطوير طريقة رياضية ذات كفاءة عالية من قبل العالم G-Dantzing وسميت بالطريقة المبسطة Simplex method (سيمبلكس) والتي سيتم التطرق لها لاحقاً.

فالبرمجة الخطية Linear Programming وتكتب (L. P.) حيث L تمثل Linear أما P تمثل Programming: هي إحدى الوسائل المستخدمة في بحوث العمليات Operation Research والتي تساعد في اتخاذ القرارات Decision في مجال رقابة وإدارة الأموال والموارد والآلات والمواد الأولية والعناصر البشرية وتعتبر من أسهل وأبسط أنواع النماذج Model التي يمكن إنشاؤها لمعالجة جميع

المشاكل الصناعية والحكومية الكبرى وذلك بالتوافق مع الزيادة في استخدام الحاسبات الإلكترونية وظهور البرمجيات الجاهزة الحديثة.

فإن البرمجة الخطية L P تبحث عادة في توزيع الموارد المتاحة Resources بين الاستخدامات البديلة من أجل تحقيق هدف Object معين ومحدد ويمكن التعبير عن هذا الهدف بأسلوب رياضي Mathematic الذي بموجبه يتم تخصيص الموارد المتاحة والمحددة ويمكن التعبير عن دالة الهدف Objective Function بصيغة المعادلة Equation والقيود Constraint المرتبطة بها في صيغ معادلات خطية (متباينات) Linear Inequalities ويمكن تعريف البرمجة الخطية L P بأنها مجموعة أساليب فنية يمكن بواسطتها الحصول على المقدار الجبري الأمثل Maximum or Minimum Optimum وهذا يمثل الهدف، تتحكم فيه قيود خطية، أو بمعنى أخر هو ذلك الأسلوب الرياضي Mathematical Method الذي يهتم بالاستغلال الأمثل للموارد المتاحة (سواء كانت بشرية أو مادية) وفق أسلوب علمي مبرمج ومنها يمكن توضيح كلمة البرمجة الخطية Linear Programming حيث البرمجة Programming تعني استخدام الأسلوب العلمي المنطقي في تحليل المشاكل، أما خطي Linear تعني المتغيرات Variables الأساسية الداخلة في تركيب دالة الهدف Objective Function (O. F) والقيود Constraint المتمثلة بمعادلات Equation أو متباينات Inequalities.

2-2 المراحل الأساسية في البرمجة الخطية:

Principal Phases for Implementing L P

تتطلب عملية تطبيق أحد أساليب بحوث العمليات O R لمعالجة أية مشكلة لبناء نموذج يصف المشكلة قيد الدرس، إن الهدف الأول في بناء النموذج هو تحليل سلوك مكونات النظام الحالي ومعرفة العوامل المؤثرة والظروف المحيطة به.

أما الهدف الثاني في بناء النموذج فهو تحديد الصبغة المثلى لنظام المستقبل، ولمعالجة أي مشكلة يجب اتباع الخطوات التالية:

1- تعريف المشكلة Definition of the Problem

2- عمل النموذج Construction of the Model

3- إيجاد حل للنموذج Solution of the Model

4- اختيار النموذج Validation of the Model

5- تطبيق الحل Implementation of the solution

ونوضح هذه الخطوات كما يلي:

1- تعريف المشكلة Problem Definition:

From the point view of operation research, this indicates three major aspects:

لغرض صياغة نموذج علمي دقيق لمعالجة المشاكل علمياً يجب علينا التعرف على مختلف جوانب المشكلة في مكوناتها والعوامل المؤثرة فيها والظروف المحيطة بها ومن أجل تحديد المشكلة لا بد من توفر الشروط التالية:

1- Description of the goal or objective of the study

تحديد الهدف: يجب أن يكون هناك هدف رئيسي تسعى الجهة المسؤولة إلى تحقيقها، وقد ينطوي الهدف لتحقيق أكبر عائد أو ربح ممكن أو أدنى كلفة ممكنة.

2- Identification of the decision alternatives of the system.

هناك عدد من البدائل من الممكن اتباعها للتوصل إلى الهدف حيث توجد عدة طرق للعمل وأن المفاضلة بين الطرق المختلفة على أساس كفاءة كل طريقة، وقياس الكفاءة معتمدة على طبيعة المشكلة، وأن عملية اختيار البديل الأمثل يساعد في اتخاذ القرار الصائب والسليم.

3- Recognition of the limitations, restrictions, and requirement of the system.

إمكانية التعبير عن كافة بيانات المشكلة وهدف الدراسة التي تلعب دوراً مهماً في تحقيق الهدف، حيث ينبغي مراعاتها عند تصميم النموذج، إن المحددات والمتغيرات التي تؤثر على المشكلة عديدة ومختلفة تعتمد على طبيعة المشكلة،

وهذا يعني أن دالة الهدف Objective Function والقيود Constraints المفروضة على المشكلة هي علاقة رياضية من الدرجة الأولى.

2- عمل النموذج Model Construction:

Depending on the definition of the problem, such a model should specify qualitative expression for the objective and constraints of the problem.

فالنموذج عبارة عن تمثيل جيد لمكونات المشكلة والعوامل المحيطة المـؤثرة فيهـا، فـإن عمليـة بناء النموذج بشكل دقيق يساعد متخذ القرار في التوصل إلى قـرارات سـليمة، وهنـاك نمـاذج مختلفـة يمكن استخدامها، منها نماذج فيزيائية ونماذج رياضية وفي كتابنا هذا نركز على النماذج الرياضية حيـث أنها عبارة عن مجموعة المعادلات أو المتباينات والمتمثلة بالمتغيرات الأساسية في الشكل.

أما النماذج التنظيمية: وهي عبـارة عـن مخططـات توضـح العلاقـات المتداخلـة بـين مختلـف الأعمال (المشكلة) وتمكننا من الاستفادة من تجارب الماضي في تطوير السلوك المستقبلي للنظام.

3- إيجاد الحل Model Solution:

In Mathematical models, this is achieved by using well-defined optimization techniques and the model yield an optimum solution if the problem is not well-defined, the simulation or heuristic models are used.

بعد صياغة النموذج الرياضي المناسب للمشكلة، فالمرحلة الثانية كيفية تحديد الكميات المـثلى لمكونات المشكلة لتنفيذ الفعاليات وفقاً للظروف المحيطة والقيود الموضوعة عـلى المشـكلة، إلا أنـه في بعض الأحيان لا يمكننا الحصول على حل مناسب باستخدام الطرق الرياضـية لـذا نلجـأ إلى مـا يسـمى بأسلوب المحاكاة أو استخدام الطرق الاحتمالية.

4- اختبار النموذج Model Validity:

A common method for testing the validity of a model is to compare its performance with some past data available for the actual system. The

model will be valid under similar conditions of inputs, it can reproduce the past performance of the system.

يتضح مما سبق أن أي نموذج يمثل الواقع ويمكن اختبار قدرة النموذج من خلال إمكانية بيـان تأثير التغيير في النظام، فإن وضع النموذج لا يعني بالضرورة وضع حل للمشكلة.

يختبر النموذج باستخدام بيانات تاريخية وقد يتطلب الأمر تحديـد النمـوذج وإعـادة اختيـاره إلى أن تزول بعض النواقص الموجودة.

5- تطبيق الحل Implementation of the solution:

Implementation of the final results of the model. This would involve the translation of these results into detailed operating instruction issued in an understand from to the individuals who will administate and operate the recommended system.

بعد أن يتم قبول النموذج والحل الناجم عنه فـالأمر يتطلـب وضـع رقابـة عـلى الحـل وهـذه تكون على هيئة معينة بحيث يـتم اكتشـاف أي خطـأ واضـح ضـمن الظـروف والتحديـدات المحيطـة بالنموذج فإذا تغيرت الظروف المحيطـة بالمشـكلة بصـورة لا تسـمح للنمـوذج بتمثيـل المنظومـة فـإن النموذج يصبح باطل المفعول.

2-3 النموذج العام للبرمجة الخطية:

General form of Linear programming

Linear Programming applies to optimization model in which objective and constraint function are strictly linear. The technique is used in a wide range of applications, including agriculture industry, transportation, economics, health systems, behavioral and social sciences.

إن تعبير البرمجة يعنـي وضـع خطـوات الحـل لمسـألة أو موضـوع أو مشروع لتحقيـق هـدف معين، هذا يعني أن البرمجة تعني تخطيط عـلى سـبيل المثـال برمجـة المشـاريع في الصـناعة والزراعـة والبناء والتنسيق والنقل وغيرها من القطاعات، ولبرمجة هذه المشـاريع يجـب ملاحظـة تـوفر عـاملين مهمين.

أولاً: الإمكانيات المتاحة أو القيود وهذه بدورها تقسم إلى عنصرين:

- الموارد Resources وتمثل بالأيدي العاملة Labourforce، الأموال Capital، المواد الأولية Row materials، الآلات والمعدات Machines ... الخ.

- النشاطات activities: وتمثل نوع وطبيعة الأعمال التي توصل إلى إنتاج المنتوج المطلوب.

ثانيا: الهدف من المشروع (Objective) وهو تحديد هدف المشروع وتحقيقه كأن يكون تحقيق أكبر ربح Maximum profit أو تقليل الكلفة الإنتاجية Minimum low cost أو أقل فترة زمنية وإلى آخر من الأهداف.

وفي ضوء ما تقدم من توضيحات حول طبيعة البرمجة الخطية ومكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية ، نجد بالإمكان التعبير عن النموذج بأبسط صورة كما يلي:

Max Z = $f(x_1 , x_2 \dots x_n)$ — دالة الهدف

Subject to: — القيود

Constraints
$$\begin{cases} g_i(x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_n) \quad \le \;,\; = \;,\; \ge \;\; b_i \\ i = 1,2 \dots n \\ x_1,\; x_2 \dots x_n \;\; \ge \;\; 0 \end{cases}$$

ويمكن كتابتها بشكل آخر:

Min or Max Z = $\sum_{j=1}^{n} C_j \;\; X_j$ — دالة الهدف

S.to: — القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \;\; X_j \;\; \le \;,\; = \;,\; \ge \;\; b_i$$

$x_j \ge 0$ — شرط اللاسلبية

i , j = 1 , 2 … m , n

وبعد إدخال Σ على حدود المعادلات (المتباينات) نحصل على ما يلي:

$$Max\ or\ Min\ Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n$$

S.t:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots.. a_{1n} x_n \leq = \geq \quad b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots.. a_{2n} x_n \leq = \geq \quad b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots.. a_{mn} x_n \leq = \geq b_m$$

$$x_1 , x_2 \ldots\ldots\ldots.. x_n \geq 0$$

وأن كل ما ذكر أعلاه يسمى بالنموذج الرياضي Mathematical Model والمثال التـالي يوضـح مراحل إنشاء النموذج الرياضي.

مثال (1)

مؤسسة صناعية تنتج أربع أنواع من المكائن وهي D, C, B, A على التـوالي، تحتـاج المؤسسـة الصناعية إلى نوعين من المواد الأولية وهي: II, I وساعات عمل معينة لأجل القيام بالعمليـة الإنتاجيـة والجدول أدناه يمثل المواد الأولية وساعات العمل المطلوبة:

نوع الماكنة / المتطلبات	A	B	C	D
مواد أولية I	18	24	20	16
مواد أولية II	8	12	21	18
ساعات العمل	6	4	7	5

أما الموارد المتاحة في المؤسسة والمتمثلة بـ 800 طن من المواد الأولية (I) و400 طن من المـواد الأولية (II)، أما ما متوفر من ساعات العمل ما يساوي 150 ساعة في كل أسبوع.

كلفة الطن الواحد من المواد الأولية I هو 2 دينار، أما كلفة الطـن الواحـد مـن المواد الأولية II 4 دينار علما بأن كلفة سـاعة العمـل الواحـدة تعـادل 1 دينـار، تبـاع

المكائن في السوق كما يلي: الماكنة A بـ 120 دينار، الماكنة B بـ 116 دينـار، أمـا الماكنـة D, C تبـاع بـــ 136 و 150 دينار على التوالي.

المطلوب: صياغة المشكلة على شكل برمجة خطية.

الحل:

أولاً: نفرض أن:

X_1 = عدد المكائن المنتجة من نوع A

X_2 = عدد المكائن المنتجة من نوع B

X_3 = عدد المكائن المنتجة من نوع C

X_4 = عدد المكائن المنتجة من نوع D

ثانياً: نكون قيود المشكلة كما يلي:

القيد الأول (المواد الأولية 1)

$$18X_1 + 24X_2 + 20X_3 + 16X_4 \leq 800$$

القيد الثاني:

$$8X_1 + 12X_2 + 21X_3 + 18X_4 \leq 400$$

القيد الثالث:

$$6X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 5X_4 \leq 150$$

ثالثاً: لتكوين دالة الهدف يجب أن نحدد أرباح كل ماكنة

الماكنة A ← X1

تباع الماكنة X1 بـ 120 دينار/لكل وحدة واحدة

كلفة المواد الأولية II, I وساعات العمل هي:

$$2 \times 18 + 4 \times 8 + 1 \times 6 = 74$$

فإن ربح الماكنة هو $120 - 74 = 46$

الماكنة B ← X2

تباع الماكنة X2 بـ 116 دينار/لكل وحدة واحدة، أما ربح الماكنة يكون:

$$116 - (24 \times 2 + 12 \times 4 + 4 \times 1) = 16$$

أما ربح الماكنة C ← X3 هو

$$136 - (20 \times 2 + 21 \times 4 + 7 \times 1) = 5$$

أما ربح الماكنة D ← X4 هو:

$$150 - (16 \times 2 + 18 \times 4 + 5 \times 1) = 41$$

نفرض أن Z تمثل دالة الهدف

ولتعظيم قيمة Z فإن دالة الهدف سوف تكون كما يلي مع القيود:

$$\text{Max} \quad Z = 46x_1 + 16X_2 + 5X_3 + 41X_4$$

Subject to:

$$18X_1 + 24X_2 + 20X_3 + 16X_4 \leq 800$$

$$8X_1 + 12X_2 + 21X_3 + 18X_4 \leq 400$$

$$6X_1 + 4X_2 + 7X_3 + 5X_4 \leq 150$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

مثال (2):

مصنع لإنتاج الخزانات المعدنية يحوي ماكنتين أحدهما قطع الصفائح وطاقتها التشغيلية 70 ساعة أسبوعيا والماكنة الثانية تقوم بطي ولحم الجوانب لتعطيها الشكل النهائي للخزان وطاقتها التشغيلية 60 ساعة أسبوعياً، وردت طلبية لتجهيز نوعين من الخزانات B, A على التوالي، والجدول التالي تبين الوحدات المطلوبة لإنتاج النوعين والمارة بالماكنتين.

مكائن / الخزانات	عدد الساعات الشتغيلية على ماكنة A	عدد الساعات التشغيلية على الماكنة B
A	4	10
B	5	6

أما الربح الصافي المتحقق من بيع الخزان A هو 3 دينار والربح الصافي الناتج من بيع الخزان B هو 6 دينار، علماً بأن الطلبية تضمنت شرطاً هو أن لا

تقل كمية النوع الثاني من الخزانات B والمسلمة أسبوعياً عن 10 خزانات، كون نموذج رياضي لتحقيق أكبر ربح ممكن.

الحل:

من المعلومات أعلاه يمكن صياغة نموذج رياضي Mathematical Model يعبر عن المسألة كما يلي:

أولاً: الهدف Objective: إن هدف إدارة المصنع هو تحقيق أكبر ربح Maximum profit وعليه يجب صياغة دالة توصلنا إلى Objective Function وهي دالة تعظيم Maximization.

بما أن الربح يتحقق من بيع كلا المنتوجين بربح صافي لذا يمكن التعبير عن دالة الهدف كما يلي:

نفرض النوع الأول من الخزانات A ⟵ X1

نفرض النوع الثاني من الخزانات B ⟵ X2

وأن ربح بيع الخزان الأول X1 هو 3 دينار أي 3X1، أما ربح الخزان الثاني X2 هو 6 دينار أي 6X2 فإن دالة الهدف تكون:

$$\text{Max } Z = 3X1 + 6X2$$

وسميت دالة الهدف لأنها ستكوّن الدليل الذي يقيس به الكمية المنتجة في كلا النوعين والذي يحقق أكبر ربح ممكن هو (Z) فإن Z تمثل حاصل جمع الربح لكل وحدة من المنتوج X2, X1 مضروباً في عدد الوحدات المنتجة في كل نوع.

ثانياً: القيود Constraints وهي كما يلي:

1- أقصى طاقة تشغيلية للماكنة الأولى 70 ساعة أسبوعيا (ليس بالضرورة استغلال كامل الطاقة) فإن القيد يكون:

$$4X1 + 5X2 \leq 70$$

هذا يعني أن النوع الأول من الخزانات تحتاج إلى 4 ساعات عمل والنوع الثاني يحتاج إلى 5 ساعات عمل على الماكنة الأولى، وجعلنا القيد على شكل

متباينة السبب كما ذكرنا سابقاً ليس من الضرورة استغلال كل الطاقة المتاحة للماكنة.

القيد الثاني: إن أقصى طاقة تشغيلية هي 60 ساعة عمل أسبوعياً أي

$$10X1 + 6X2 \leq 60$$

أي أن النوع الأول من الخزانات يحتاج إلى 10 ساعات عمل، أما النوع الثاني من الخزانات يحتاج إلى 6 ساعات عمل والطاقة المتاحة للماكنة هو 60 ساعة عمل في الأسبوع.

والقيد الثالث هناك شرط أن إنتاجية النوع الثاني من الخزانات X2 يجب أن لا يقل عن 10 خزانات أسبوعياً أي بمعنى:

$$X2 \geq 10$$

أما القيد الأخير هو الشرط الواجب عدم إنتاج أي مقدار سالب أي أن:

$$Xj \geq 0 \qquad j = 1, 2$$

فيكون شكل النموذج الرياضي كما يلي:

$$\text{Max} \quad Z = 3X1 + 6X2$$

Subject to:

$$4X_1 + 5X_2 \leq 70$$

$$10X_1 + 6X_2 \leq 60$$

$$X_2 \geq 10$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

مثال (3) Reddy Mikks Company

Reddy Mikks Company produce both interior and exertior paint from two raw materials M1 and M2, the following table provides the basic data of problem:

	Tons of raw material per ton of		Maximum daily availability (tons)
	Exterior paint	interior paint	
Raw Material M1	6	4	24
Raw Material M2	1	2	6
Profit per ton ($1000)	5	5	

A market survey indicates that the daily demand for interior paint cannot exceed exterior paint by more than 1 ton. Also the maximum daily demand of interior paint is 2 tons.

Reddy Mikks wants to determine the optimum product Mix of interior and exterior paints that maximizes the total daily profit.

Solution

إن أي نموذج خطي L P يحتوي على ثلاث مكونات وهي:

1- المتغيرات والمطلوب تحديدها.

2- الهدف

3- القيود

لذا نفرض:

الإنتاج اليومي من الأصباغ الخارجية/ طن = X_1

الإنتاج اليومي من الأصباغ الداخلية/طن = X2

فإن دالة الهدف يحقق أكبر ربح أي

$$\text{Max} \quad Z = 5X_1 + 4X_2$$

بعد تحديد الهدف للمشكلة نكون قيود المسألة بالمواد المتاحة.

نلاحظ هنا لدينا نوعين من المواد الخام لصناعة الأصباغ فإن لكل نوع هناك قيد ويمكن توضيحها كما يلي:

Usage of raw material by both paint $\leq$ Maximum raw material availability

ومن البيانات المتاحة يمكن تكوين قيدين أحدهم يمثل النوع الأول من المواد الخام M1 والقيد الثاني يمثل النوع الثاني M_2 من المواد الخام لكن ما هو متوفر من المواد الأولية M_1 هو 24 طن أما من M_2 هو 6 طن فإن صيغة القيود تكون من نوع أصغر ويساوي $\leq$ أي:

$6X1 + 4X2 \leq 24$ Raw material M1

$X1 + 2X2 \leq 6$ Raw material M2

ومن ضمن الدراسات السوقية وجد أن الطلب اليومي من الأصباغ الداخلية لا تزيد عن الأصباغ الخارجية بأكثر من طن واحد وهذا متمثل بالشرط الأول للقيد حيث يكون كما يلي:

$$X_2 \leq 1 + X_1$$

وبما أن من شروط القيد أن الطرف الأيمن يمثل كمية ثابتة لذا يجب تعديل القيد ليصبح:

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

أما الشرط الثاني بالنسبة للدراسة كان أن الطلب اليومي للأصباغ الداخلية لا تزيد عن 2 طن فإن القيد يكون:

$$X_2 \leq 2$$

وكما هو معلوم أن من شروط صياغة النموذج على المتغيرات المستخدمة يجب أن تكون موجبة أو صفرية أي $X1, X2 \geq 0$

ويمكن إعادة صياغة النموذج الكلي Reddy Mikks Model

$$\text{Max} \quad Z = 5X1 + 4X2$$

Subject to

$$6X_1 + 4X_2 \leq 24$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

فإن أي قيمة لكل من X1 ,X2 بحيث تحقق القيود أعلاه (قيود النموذج Model Constraints وهذا ما يمثل الحل الملائم Feasible Solution.

2-4 طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

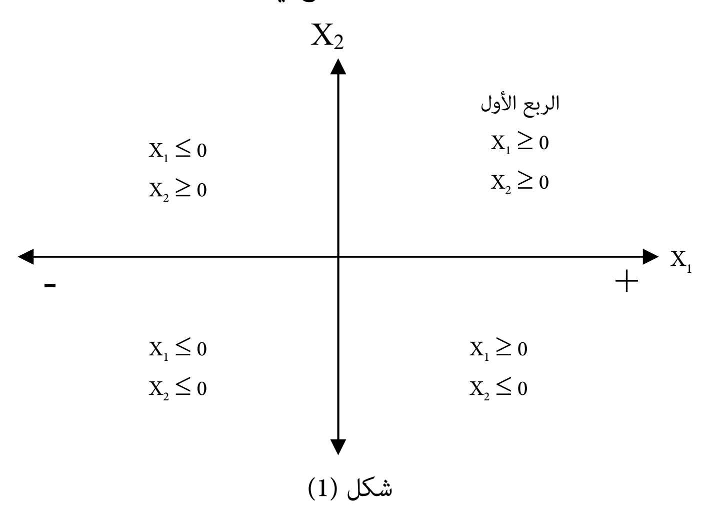
Methods of Solution Linear Programming Model

بعد صياغة النموذج الرياضي الخطي Linear Mathematical Model للمشكلة يمكن حل النماذج بأسلوبين:

2-4-1 الطريقة البيانية Graphical Method:

The model can be solved graphically because it has only two variables. For model with more than two variables, the graphical method is impossible. We shall be able to draw the constraint (allocation of resourced determined with the objective of either Maximizing or Minimizing linear objective function). How is this allocation is determined? Lets variables X an Y denote, respectively, the units of products then let x = 0 find y and graph all the constraint.

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرين فقط Two Variables ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة X-axis و Y-axis وكما بينا سابقاً أن جميع متغيرات المشكلة والتي تؤثر في اتخاذ القرارات يجب أن تكون موجبة أي $Xj \geq 0$ وأن j = 1.2 من هذا يتضح أن منطقة الحلول الممكنة ستكون في الربع الأيمن الشمالي (الربع الأول) حيث المحورين يكون (موجب) كما موضح في الشكل (1):



شكل (1)

أما إجراءات الحل بالأسلوب البياني فتشكل الخطوتين التاليتين:

1- Determination of the solution space that defines all feasible solution of the model.

2- Determination of the optimum solution from among all feasible points in the solution space.

الخطوة الأولى: حدد مساحة الحل الممكن بتحديد نقاط الحل التي تحقق جميع القيود مجتمعة.

الخطوة الثانية: تحديد الحل الأمثل بعد اختيار النقاط الركنية لمنطقة الحلول الممكنة.

ويمكن تلخيص خطوات الرسم البياني كما يلي:

1- تمثيل المتغيرات بالإحداثيات السينية x-axis (الأفقي) والإحداث الصادي y-axis العمودي حيث X1 يمثل الإحداث الأفقي horizontal أما X2 يمثل الإحداث العمودي Vertical.

2- تمثيل كل قيد Constraint بخط مستقيم Linear بعد تحويله من متباينة Inequalities إلى معادلة equation ثم نجد قيم X2, X1 بأسلوب الفرض.

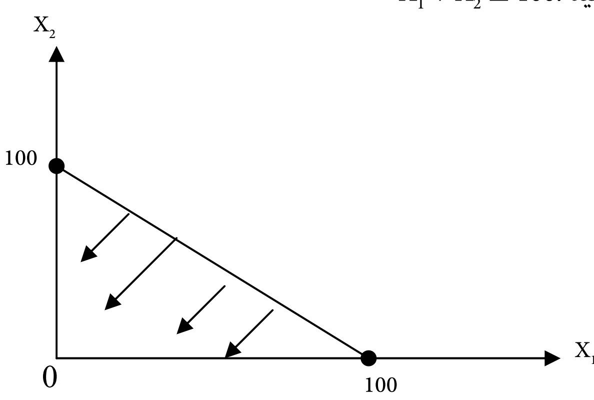
3- نرسم كل قيد وذلك بالتوصيل ما بين النقاط المستخرجة لكل قيد ثم تحدد مجال الحل للقيد حسب طبيعة القيد ويمكن إعطاء ملخص عن طبيعة القيد ومجال الحل لكل قيد:

ويمكن إعطاء ملخص عن طبيعة القيد ومجال الحل لكل قيد:

1- إذا كان دالة الهدف Objective Function من نوع Maximum عادة تكون القيود من نوع $\leq$ أصغر ويساوي إلا في بعض الحالات الخاصة المرتبطة بالمشكلة.

2- أما في حالة إذا كانت دالة الهدف Objective Function من نوع Minimum فإن جميع القيود تكون في حالة $\geq$ أكبر من إلا في بعض الحالات المتطلبة في المشكلة.

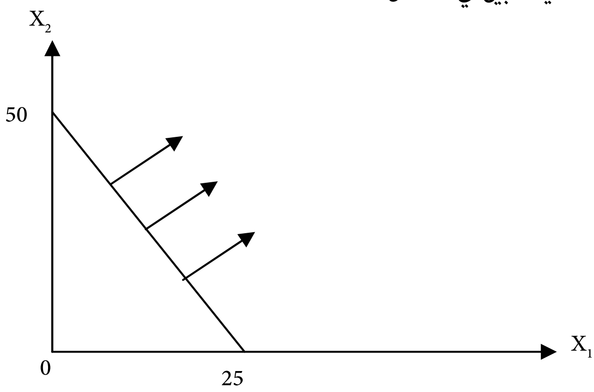
3- القيد في نوع ≤ أصغر ويساوي مجال الحل Feasible Region له يقع تحت القيد باتجاه نقطة الأصل كما في القيد: $X_1 + X_2 \leq 100$



شكل (2) مجال الحل للقيد $X_1 + X_2 \leq 100$

4- أما إذا كان القيد من نوع ≥ أكبر ويساوي فإن مجال الحل يقع فوق القيد مبتعداً عن نقطة الأصل كما في القيد $2X_1 + X_2 \geq 50$

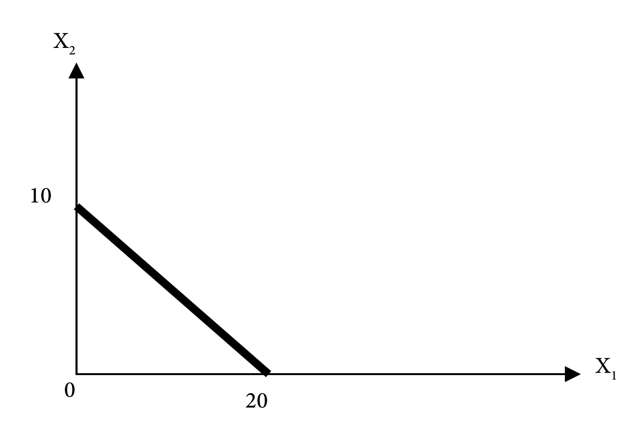
أما رسم هذا القيد مبين في الشكل أدناه



شكل (3) مجال الحل للقيد $2X_1 + X_2 \geq 50$

5- أما إذا كان القيد من نوع المساواة والتي تعني أن الموارد المتاحة تستغل من قبل X2, X1 في القيد.

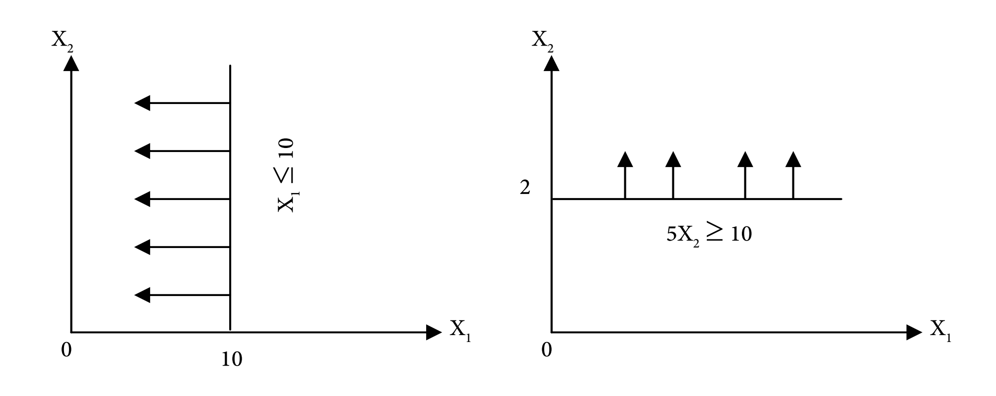
أما مجال الحل لهذا النوع من القيود فتكون على القيد نفسه، أي نقطة عليه نحقق القيد كما في حالة $3X1 + 6X2 = 60$ أما رسم القيد موضح أدناه:



شكل (4) مجال الحل للقيد $3X_1 + 6X_2 = 60$

6- في بعض الأحيان يكون القيد بدلالة أحد المتغيرات فقط ففي هـذه الحالـة يكـون عمـودي على الإحداثي الذي يعود له المتغير variables كما هو واضح في القيد:

$X1 \leq 10$ أو $5X2 \geq 10$



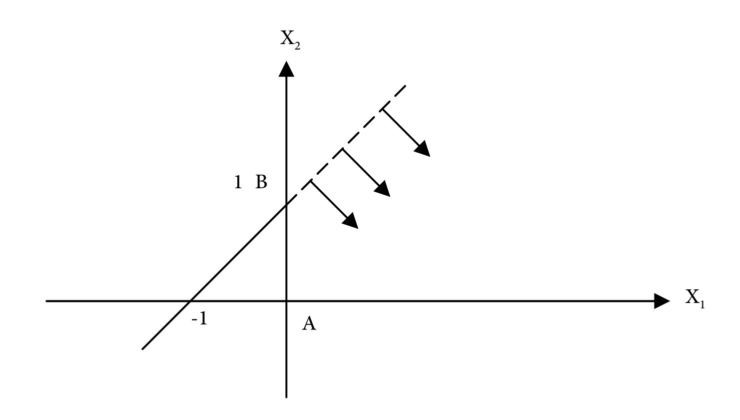
شكل (5) يوضح الحالتين للقيدين

$X_1 \leq 10$ $5X_2 \geq 10$

7- في بعض الأحيان يقع القيد في الربع السالب كما في القيد التالي:

$-X1 + X2 \leq 1$

أما رسم القيد موضح في الشكل أدناه



شكل (6)

هنا القيد يقع في الربع الثاني لذا يجب أن يمتد هذا المستقيم إلى الربع الأول حسب الشرط أن جميع قيم Xj يجب أن تكون موجبة ($Xj \geq 0$) هذا يعني لا يجوز أي إنتاج في السالب لذا يمد القيد ليصل إلى الربع الأول، أما مجال الحل فيكون تحت الخط ويبدأ من نقطة الأصل أي في حدود AB.

4- بعد رسم كل القيود مع المجال سنحدد مساحة (مجال) منطقة الحلول الممكنة Feasible Region ويمكن أن تكتب بشكل مختصر F.R وهذه النقطة تظهر من تقاطع الخطوط المستقيمة الممثلة للقيود (تمثل المساحة المشتركة للجميع مجال القيود).

5- يحدد الحل الأمثل بعد اختيار نقاط مجال الحل والتعويض في دالة الهدف O.F فالحل الأمثل هي أعلى قيمة في حالة دالة الهدف objective function O.F إذا كانت Maximum وأخذ أصغر نقطة عندما تكون دالة الهدف Minimum.

مثال (4):

Determine the solution space and the optimum solution of the Reddy Mikks Model example (3).

Max $Z = 5X_1 + 4X_2$

Subject to:

$$4X_1 + 4X_2 \leq 24$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

Solution

Step. 1 Determine the feasible Solution

باستخدام الخطوات السابقة لرسم هذه القيود أولاً نحدد المتغيرات الإيجابية $X2 \geq 0, X1 \geq 0$ على الإحداثيات حيث X1 يمثل الإحداث X-axis أما X2 يمثل الإحداث Y-axis كما في الشكل (1)

أما عملية رسم القيود الأربعة بحيث جعل تلك القيود على هيئة مساواة equation ثم إيجاد النقاط لكل قيد ورسمه على الإحداثيات كما يلي:

القيد الأول $6X_1 + 4X_2 = 24$

Let X1 = 0

$6(0) + 4X2 = 24 \qquad X2 = \dfrac{24}{4} = 6$

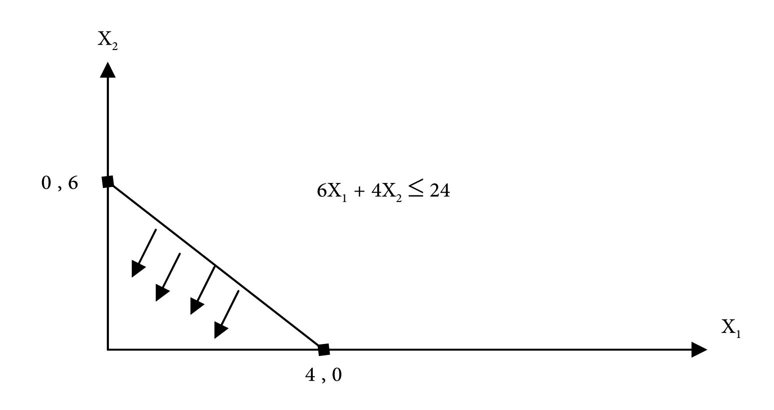
نقطة (1) (0, 6)

let X2 = 0

$6X1 + 4(0) = 24 \qquad X1 = \dfrac{24}{6} = 4$

نقطة (2) (4, 0)

فإذا وصلنا بين هاتين النقطتين توصلنا إلى رسم القيد الأول مع ذكر مجاله كما يلي:

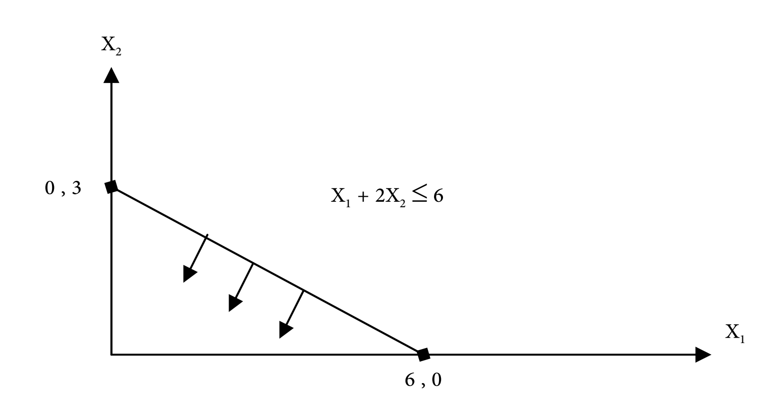


شكل (7)

القيد الثاني $X_1 + 2X_2 = 6$ كما في القيد الأول

Let X1 = 0 (0, 3)

Let X2 = 0 (6, 0)

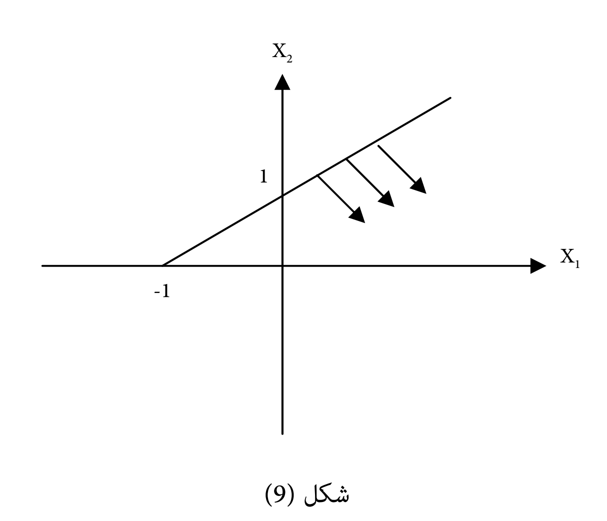


شكل (8)

القيد الثالث $-X1 + X2 = 1$

Let X1 = 0 (0, 1)

Let X2 = 0 (-1, 0)

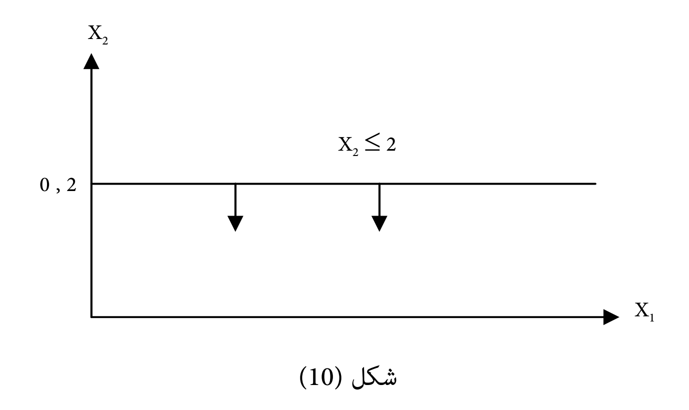


شكل (9)

نلاحظ هنا قيمة X_1 سالبة لا يجوز هذا من ضمن شروط النموذج الرياضي لذا يمد الخط المستقيم إلى الربع الأول ويكون المجال تحت المستقيم كما في شكل(9).

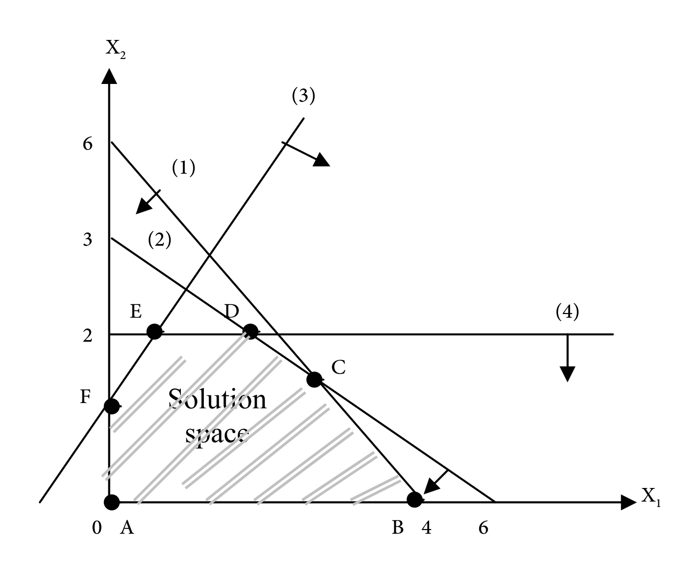
القيد الرابع $X2 = 2$

هذا القيد مكون من نقطة واحدة وهو (2 ,0) أي يكون عامودي على نفس الإحداث الذي يعود له المتغير X2 عامودي على الإحداث X2



شكل (10)

ويمكن جمع جميع القيود في شكل واحد وكما يلي:



شكل (11) مجال الحل لـ Reddy Mikks Model

فإن جميع النقاط التي رسمت بها القيود تحقق القيـود، ويمكـن إيجـاد حـل المسـألة باختيـار النقاط التي تقع على الإحداثين من ضمنها الصفر مع النقـاط التـي شـكلتها القيـود عـلى نفسـها فـإن مجال الحل Feasible Region (F.R) هو متمثل بالجزء المظلل في الشكل أعلاه، فإن النقاط A, B, C, D, E, F تمثل نقاط مجال الحل Points of Feasible Solution

Step. 2 Determination of optimum solution:

أما لإيجاد الحل الأمثل فإن النقاط التي تحددت في Step 1 والتي شـكلت مجـال الحـل وهـي A, B, C, D, E, F وهذه تمثل النقاط الركنية المكونة لمنطقة الحلول الممكنة في معادلـة دالـة الهـدف ويمكن تعويض قيم هذه النقاط في دالة الهدف وكما يلي:

نقاط	دالة الهدف O. F
A (0 , 0)	Z = 0
B (4 , 0)	Z = 3(4) + 2(0) = 12
C (3 1/3 , 1 1/3)	Z = 3(3 1/3 + 2 (1 1/3) = 12 2/3
D (2 , 2)	Z = 3(2) + 2(2) = 10
E (1 , 2)	Z = 3(1) + 2(2) = 7
F (0 , 1)	Z = 3(0) + 2(1) = 2

فإن نقطة C تمثل الحل الأمثل Optimal Solution عندما:

$X_1 = 10/3$ ton

$X_2 = 4/3$ ton

$Z = 12\ 2/3$ profit

مثال (5):

Graph the following Linear programming model and find the optimal solution.

Max $Z = 12X1 + 8X2$

Subject to:

$$8X_1 + 6X_2 \leq 2200$$

$$4X_1 + 9X_2 \leq 1800$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 400$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution

Step. 1

Determination of Feasible solution

القيد الأول $8X1 + 6X2 = 2200$

Let $X1 = 0$ $X2 = \frac{2200}{6} = 366\ 2/3$

نقطة الأولى (0, 366 2/3)

Let $X2 = 0$ $8X1 = 2200$

$X1 = \frac{2200}{8} = 275$

نقطة ثانية (275, 0)

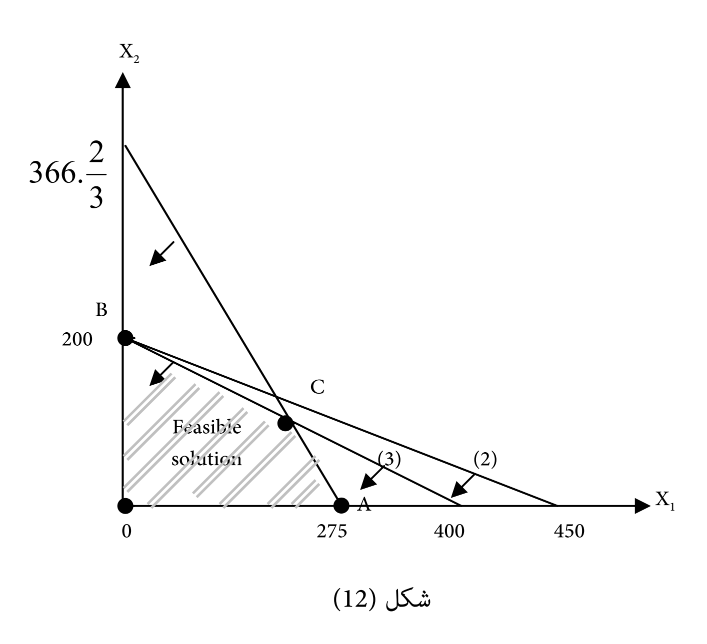
القيد الثاني وبنفس الأسلوب نحصل على النقطتين

(0, 200) , (450, 0)

أما نقاط القيد الثالث فيكون

(0, 200) , (400, 0)

والشكل التالي يبين رسم القيود الثلاثة معاً مبيناً مجال الحل:



شكل (12)

ومن شكل (12) نلاحظ أن مجال الحل Feasible Solution هو OACB فـأي نقطـة تقـع في هذا الجزء المظلل أو على حدودها يحقق القيود الثلاثة ومن ضمنها دالـة الهـدف، لكـن هنـاك نقطـة واحدة تعطي الحل الأمثل أو أكبر ربح ممكن.

لو نظرنا إلى الرسم أعلاه نلاحظ أن القيد الثاني لا تأثير له على منطقة الحل المقبول Feasible Region لذلك يمكن الاستغناء عنه ويطلق على هذا القيد Redundant أي القيد الملغي.

Step. 2

نهدف الآن إلى إيجاد قيمة X2, X1 في الشكل OACB (منطقة الحلول المقبولـة F. R) والتـي تجعل دالة الهدف O.F ($Z = 12X1 + 8X2$) أكبر ما يمكن.

ويمكن اللجوء إلى النقاط المحددة للمجال (المحدبة ويمكن أن تكون أحد نقاط رؤوس المنطقة المحدبة وهي A, C, B, O) ولأجل تحديد النقطة نجد إحداثيات كل نقطـة مـن النقـاط الأربعـة ثـم نعوضها في دالة الهدف كما هي واضحة أدناه:

النقاط	O.F Z = 12X4 + 8X2
O (0,0)	Z = 12(0) + 8(0) = 0
A (275, 0)	Z = 12(275) + 8(0) = 3300
C (200,100)	Z = 12(200) + 8(100) 2400 + 800= 3200
B (0.200)	Z = (12(0) + 8(200) = 1600

إن أعلى قيمة لدالة الهدف (Z) هي 3300 ويمكن توضيح كيفية حساب قيمة C إما بحل المعادلتين

$$8X_1 + 6X_2 = 2200$$

$$X_1 + 2X_2 = 400$$

فنحصل على قيمة X2, X1

أو بإنزال عمود من نقطة التقاطع على الإحداث السيني x-axis فنحصل على قيمة X1 وبالمثل من نفس النقطة ننزل عمود على الإحداث الصادي y-axis فنجد قيمة X2 وهي (200, 100).

مثال (6):

ترغب مديرية الثروة الحيوانية وضع برنامج خاص لإنتاج العلف الحيواني، وقد قرر القيام بإنتاج نوعين من أنواع الأعلاف كل نوع يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للاستعمال وأن تكلفة كل نوع من أنواع العلف تختلف عن النوع الآخر وكما مبين أدناه:

نوع المادة في تركيبة العلف	نوع العلف		الاحتياجات الأسبوعية ك. غ
	A	B	
I	2	3	1250
II	1	1	250
III	5	3	900
IV	0.6	0.25	232.5
تكلفة الوحدة الواحدة	41	35	

كون نموذج خطي للعلف الحيواني بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن وتحقق الاحتياجات الأسبوعية مستخدماً الأسلوب البياني.

Solution:

أولاً: نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من العلف A هو X1 كغم وعدد الوحدات المنتجة من العلف B هو X2 كغم.

ثانياً: تكون دالة الهدف التي تحقق أقل كلفة ممكنة علماً بأن كلفة إنتاج النوع الأول X1 هو 41 دينار وأن كلفة إنتاج النوع الثاني من العلف X2 هو 35 دينار، فإن دالة الهدف Objective Function

$$\text{Minimum} \qquad Z = 41\,X1 + 35\,X2$$

ثالثاً: تكوين القيود Constraints

هنا لدينا ثلاثة قيود من المواد التركيبية الداخلة في صناعة الأعلاف كما يلي على التوالي باستخدام العناصر في الجدول:

$$2X_1 + 3X_2 \geq 1250$$

$$X_1 + X_2 \geq 250$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 900$$

$$0.6X_1 + 0.25X_2 \geq 1250$$

رابعاً: شرط الإيجابية أي $Xj \geq 0$

إذن مشكلة البرمجة الخطية ستكون:

$$\text{Min } Z = 41X_1 + 35X_2$$

s.t:

$$2X_1 + 3X_2 \geq 1250$$

$$X_1 + X_2 \geq 250$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 900$$

$$0.6X_1 + 0.25X_2 \geq 1250$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أما رسم القيود فيكون كما يلي:

القيد الأول:

$2X_1 + 3X_2 = 1250$

Let $X_1 = 0$ $X_2 = \frac{1250}{3}$ $(0 , 416\frac{2}{3})$

القيد الثاني:

$X_1 + X_2 = 250$

$X_1 = 0$ $X_2 = 250$ $(0 , 250)$

$X_2 = 0$ $X_1 = 250$ $(250 , 0)$

القيد الثالث:

$5X_1 + 3X_2 = 900$

$X_1 = 0$ $X_2 = \frac{900}{3}$ $(0 , 300)$

$X_2 = 0$ $X_1 = \frac{900}{5}$ $(\frac{900}{5} , 0)$

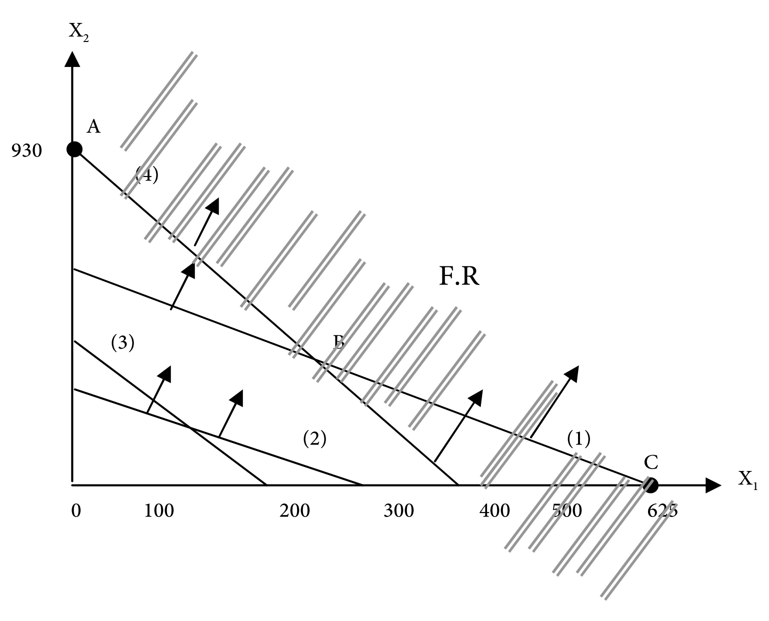
القيد الرابع:

$2X_1 + 3X_2 = 125$

$X_1 = 0$ $X_2 = \frac{232.5}{0.25}$ $(0 , 930)$

$X_2 = 0$ $X_1 = \frac{232.5}{0.6}$ $(387.5 , 0)$

وبرسم القيود الأربعة بشكل واحد بعد توصيل ما بين كل نقطتين في القيد الواحد كما هو موضح في الشكل أدناه:



شكل (13)

بما أن جميع القيود أكبر ويساوي فإن مجال الحل يقع فوق المستقيم أي يبتعد عن نقطة الأصل فنقطة تجمع جميع الأسهم يكون في المجال A B C هذا هو Feasible Region التي تمثل منطقة الحلول المقبولة للمشكلة وهي المنطقة المظللة A B C حيث أن A , B , C هي النقاط المتطرفة وأن الحل الأمثل يقع في إحدى هذه النقاط التي تكون أقرب إلى نقطة الأصل لأن دالة الهدف هي جعل Z أقل ما يمكن، نلاحظ هنا أن القيد 2 و3 ليس لهم تأثير على الحل فهما قيدان (redundant)

أما لحساب قيمة Z نعمل الجدول التالي:

النقاط (التطرف)	Min Z
A (0 , 930)	41(0) + 35(930) = 32550
B (296.6 , 219.2)	41(296.6) + 35 (219.2) = 19833
C (625 , 0)	41(625) + 35(0) = 25625

نلاحظ هنا أقل كلفة ممكنة تقع عند نقطة B عندما:

X2 = 219.2 X1 = 296.6

4-3-2 الطريقة المبسطة Simplex Method:

The graphical solution with more than two variables in a linear programming model is impossible for that we use simplex method to solve such problem. Simplex method solves linear programming in iterations where the same computational steps are repeated a number of times before the optimum is reached.

The nature of computations needs essential tools for solving linear programming.

The general idea is to start with starting solution (S, B, F, S). Starting Basic Feasible Solution.

طريقة السمبلكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً لحل النماذج الرياضية.

قبل أن نتطرق إلى الخطوات المتبعة في طريقة السمبلكس Simplex سنقوم بتعريف النماذج الرياضية في البرمجة الخطية كما ذكرت سابقاً إن البرمجة الخطية Linear Programming تهدف إلى تعظيم (Max) أو تقليل (Min) دالة الهدف وإن لدالة الهدف قيوداً تحدد مشكلة البرمجة الخطية ولهذه القيود صيغ رياضية معينة قد تكون من نوع أكبر أو يساوي ≤ أو اصغر ويساوي ≥ أو من نوع المساواة =.

أما الخطوات المتبعة في طريقة Simplex فيمكن توضيحها حسب المراحل التالية:

المرحلة الأولى:

هناك نموذجان رئيسيان للبرمجة الخطية

2-4-2-1 النموذج العام Canonical Form

2-4-2-2 النموذج القياس Standard Form

2-4-2-1 النموذج العام Canonical Form:

تتخذ دالة الهدف في النموذج العام صفة التعظيم وأن القيود الموضوعة للمشكلة تكـون عـلى شكل متباينات Inequalities أقل أو يساوي $\leq$ كما في الأمثلة التالية:

1- Max $Z = 2X_1 - 4X_2 + 5X_3 - 6X_4$

subject to:

$$X_1 + 4X_2 - 2X_3 + 8X_4 \leq 2$$

$$-X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 \leq 2$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

2- Max $Z = 2X_1 + 3X_2$

subject to:

$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

وبصورة عامة فإن للنموذج العام لصيغة البرمجة الخطية يمكن توضيحها كما يلي:

Max $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \ldots\ldots + C_n X_n$

subject to:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 \ldots\ldots.. a_{1n} X_n \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 \ldots\ldots.. a_{2n} X_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots.$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 \ldots\ldots.. a_{mn} X_n \leq b_m$$

$$X_j \geq 0$$

أما في حالة Minimum فإن النموذج العام للبرمجة الخطية يكون على الشكل التالي:

Min $Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \ldots\ldots. + C_n X_n$

subject to:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots a_{1n} x_n \geq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots a_{2n} x_n \geq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots a_{mn} x_n \geq b_m$$

$$X_j \geq 0$$

نلاحظ هنا في حالة Max و Min أن $Xj \geq 0$ ولكن في بعض الأحيان تظهر أحـد قـيم Xj غـير مفيـدة بالإشـارة Unrestricted variable فهنـا المتغـير Variables يلعـب دور slack و Surplus ويمكن التخلص من هذه الظاهرة وذلك فإن المتغير يأخذ الإشارة السالبة والموجبة في آن واحد، مثلا إذا كانت X2 Unrestricted فإن:

$$X2 = X2^{+} - X2^{-}$$

$$X2^{+} , X2^{-} \geq 0$$

2-4-2-2 النموذج القياس Standard Form:

The Linear Programming model may include constraints of the types $\geq$, = and $\leq$. Moreover, the variables may be nonnegative or unrestricted in sign to develop the solution. We must put the problem in a Common Format:

1- All the constraints are equation with positive right-hand side.

2- All the variables are nonnegative.

3- The objective function may be maximization or minimization.

يعتبر النموذج القياس من النماذج المهمة حيث لا يمكـن تطبيـق طريقـة السـمبلكس إلا بعـد تحويل المشكلة إلى شكل نموذج قياس وهذه تحدد بما يلي:

1- دالة الهدف تكون إما Max أو Min.

2- جميع القيود (Constraint) للمشكلة. يجب أن تكون عـلى شـكل معـادلات ومـما يجـدر الإشارة إليه أن النموذج العام يمكن تحويله إلى النمـوذج القيـاس في حالـة إذا كانـت مشـكلة البرمجـة الخطية من نوع Maximum:

$$\text{Max} \quad Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots. C_n X_n$$

subject to:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots. a_{1n} X_n \leq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots. A_{2n} X_n \leq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots..$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots. A_{mn} X_n \leq b_m$$

$$X_1 , X_2 \ldots\ldots.. X_n \geq 0$$

فلأجل تحويل القيود من $\leq$ إلى صيغة = نحتاج إلى إضـافة كميـة موجبـة مـثلا S للقيـد الأول (slack variable)

فمثلاً لو كان لدي $3 \leq 5$

لجعل هذه مساواة نحتاج إلى إضافة العدد 2+ للطرف الأيسر أي:

$$3 + 2 = 5$$

وكذلك إضافة S2 للقيد الثاني وهكذا إلى آخر قيد أي Sm لقيد الأخير لذلك ستصبح شكل البرمجة الخطية بشكل مساواة.

وهذا يمكن توضيحه على الصيغة العامة للنموذج الخطي وكما يلي:

$$ax \qquad Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 \ldots\ldots C_n X_n + OS_1 + OS_2 + \ldots OS_m$$

subject to:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots a_{1n} X_n + S_1 = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots a_{2n} X_n + S_2 = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots a_{mn} X_n + \ldots \quad S_m = b_m$$

$$X_j \geq 0 \quad , \quad S_i \geq 0$$

حيث: $i = 1 , 2 , \ldots m \quad , \quad j = 1 , 2 , \ldots n$

يطلق على S1, S2 ... Sm بالمتغيرات المكملة Slack Variable وهذه المتغيرات تدخل على القيود كما ذكرنا سابقاً من نوع $\leq$ لتغير المتباينة إلى مساواة ولكن ضمن الشروط التالية:

1- يكون معامل المتغيرات المكملة Slack variable في دالة الهدف مساوية إلى صفر كما لاحظنا أعلاه لأن دالة الهدف هي معادلة مساواة وليست متباينة؟

2- يدخل على القيد الواحد بمعامل يساوي واحد وفي باقي القيود مساوية إلى الصفر هذا يعني أن مصفوفة معاملات سلاك (Slack variable) هي مصفوفة أحادية Identity Matrix.

المقصود بها:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

3- أما الشرط الثالث والأخير أن جميع هـذه المتغـيرات التكميليـة Slack Variable يجـب أن تكون موجبة أي تأخذ نفس شرط المتغيرات Variables في القيود أي بمعنـى آخـر أن $Si \geq 0$ وأن $i = 1.2 \ldots m$

فيمكن القول هنا إذا كان (S. V) مختصر كلمـة Slack Variable قيمتـه مسـاوية إلى الصـفر فإن القيود ستكون في قيمتها القصوى (أي استغلال كامل) أما لو أخذت قيمة موجبة فإن ذلك سيؤدي إلى عدم استغلال كامل للزمن المتاح وبالتالي ستكون المساحة المحصورة بين الخط المستقيم الذي يمثـل القيد وبين المحورين الأفقي والعمودي أصغر.

أما المرحلة الثانية: هـو التحديـد الجـبري لإحـدى النقـاط لمنطقـة الحـل الملائـم مـن الصـيغة القياسية Standard Form تساعد هذه المرحلـة عـلى إعـداد الحـل الأسـاسي الأولي Basic Feasible Solution الذي يبدأ من نقطة الأصل أي بعبارة أخرى إذا كانت المتغيرات Xj مساوية إلى الصفر ($X1 = 0, X2 = 0 \ldots. Xn = 0$) فإن S.V يساوي قيم bi أي ($Si = bi$) وأن $Z = 0$

فإن:

$$S_1 = b_1 \quad , \quad S_2 = b_2 \quad \ldots\ldots.. \quad S_m = b_m$$

فإن S.B.F.S مختصر Starting Basic Feasible Solution للنموذج القياس هو:

Non-basic	Basic	
$X_1 = 0$	$S_1 = b_1$	S.B.F.S
$X_2 = 0$	$S_2 = b_2$	
.	.	
.	.	
.	.	
$X_n = 0$	$Z = 0$	

فهنا تطلق على المتغيرات Xj متغيرات غير أساسية Non-basic Variables ويطلق على المتغـيرات (Si) ومن ضمنها دالة الهدف (Z) بالمتغيرات الأساسـية Basic Variables فتسـاعد هـذه المرحلـة عـلى إعـداد الحـل الأساسي basic Solution من مجموعة المعادلات (القيـود Constraints) عـددها m وتحتـوي عـلى عـدد مـن

المجاهيل (المتغيرات Variables) عددها n وذلك بجعل قيمتها مساوية إلى الصفر أي $Xj = 0$ نحسب الفرق بين عدد القيود وعدد المتغيرات أي بكلام آخر (m-n) فهذه العملية تؤدي إلى جعل عدد المعادلات m مساوية إلى عدد المتغيرات n التي لم تحدد (تعرف) قيمتها بعد ومن حل هذه المعادلات نستطيع تحديد قيم هذه المتغيرات المتبقية.

المرحلة الثالثة: تمثيل البيانات السابقة (Standard Form) على شكل جدول وذلك بالاعتماد على معاملات المتغيرات الغير أساسية Non-basic variable ومعاملات المتغيرات الأساسية basic variable وبضمنها دالة الهدف وهذا الجدول يسمى بالجدول الابتدائي المبسط Simplex tablue والذي يمثل الحل الأساسي الأولي Starting Basic Feasible Solution S. B. F. S كما هو موضح أدناه:

المتغيرات الأساسية Basic variable	Non-basic variable X_j (غير الأساسية)			Basic variable S_i (الأساسية)				الطرف الأيمن R.H.S
	X_1	X_2	X_n	S_1	S_2	…	S_m	
S_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…
S_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	0	0	…	1	b_m
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_n$	0	0	…	0	0

جدول (1) الحل الأساسي الأولي للنموذج القياسي S.B.F.S

وقد تم تصميم الجدول أعلاه كما يلي:

1- الصف الأولي يمثل أسماء المتغيرات الغير أساسية والأساسية.

2- العمود الأول يمثل المتغيرات الأساسية (B.V) التي حددناها وذلك لغرض الحصول على حل ابتدائي أولي ملائم الذي نبدأ منه بتحسين الحل من خلال استخدام أسلوب سمبلكس للوصول إلى أفضل حل ممكن (الأمثل) Optimal.

3- هذا الجزء مكون من جزئين جزء ضم مصفوفة المعـاملات للمتغـيرات الغـير أساسـية non-basic variable أي:

مصفوف المعاملاتCoenfficient Matrix
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

أمـا الجـزء الآخـر منـه فيمثـل مصـفوفة المتغـيرات الأساسـية Basic Variable والتـي تكـون مصفوفة أحادية Identity matrix أي:

Indentity matrix slack variable coefficient
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & 1 \end{pmatrix}$$

4- الصـف الأخـير والمتمثـل بمعادلـة دالـة الهـدف أي أخـذ المعـاملات لكـل مـن Xj (Cj) أو معاملات Si وهي (0) يلاحظ هنا معاملات المتغيرات الغـير أساسـية سـالبة، ذلـك بعـد نقلهـا للطـرف الأيسر وجعل معادلة دالة الهدف مساوية إلى الصفر أي:

Z – C1X1 – C2X2 …. CmXn – Osi = 0

ويمكن تلخيص الجدول إلى ما يلي:

B . V	Non . B . V Xj	B . V Si	الطرف الأيمن R.H.S
S1		1 0 ……	b_1
S2		0 1 ……	b_2
. . .	a_{ij}	. . .	. . .
Sm		0 0 … 1	b_m
Z_i	-Cj	0	0

جدول رقم 2

يمكن إعطاء ملخص للصبغة القياسية Standard Form أن كل نماذج البرمجة الخطية تحوي على قيود Constraint وهذه القيود إما أن تكون $\geq$، = ، $\leq$، أما متغيرات النموذج تكون غير سالبة non-negative أو غير مقيدة بالإشارة Unrestricted in sign، ولحل مثل هذه النماذج بحيث جعل النموذج الرياضي بالصيغة القياسية Standard Form أما بديهيات الصبغة القياس للبرمجة الخطية هي:

1- كل القيود يجب أن تكون مساواة للطرف الأيمن الموجبnon-negative right hand side.

2- كل المتغيرات المستخدمة يجب أن تكون موجبة non negative.

3- دالة الهدف إما تكون Maximum عظمى أو Minimum صغرى.

وفيما يلي المثال التالي يوضح كيفية تحويل القيود من الصيغة القانونية Canonical Form إلى الصيغة القياسية Standard Form في حالة دالة الهدف Maximum وفي حالة إذا كانت دالة الهدف Minimum.

مثال (7):

Write the following linear programming model in the standard form:

Max $Z = 2X1 + 3X2$

subject to:

$X_1 + X_2 \leq 10$

$-2X_1 + 3X_2 \geq -5$

$7X_1 + 4X_2 \leq 6$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

لتحويل القيود أعلاه إلى الصيغة القياسية يجب توفر الشروط السابقة، نلاحظ هنا أن القيد الثاني الطرف الأيمن سالب يجب تحويله إلى موجب أولاً وذلك بضرب كل القيد في سالب واحد (1-) أي:

$(-2X_1 + 3X_2 \geq -5) X - 1$

$2X_1 - 3X_2 \leq +5$

بعد ذلك نحول كل القيود إلى صيغة المساواة وذلك بإضافة Slack Variable متغير تكميلي Si لكل القيود وحسب شروط Slack Variable (S. V) أي كما يلي:

Max $Z = 2X_1 + 3X_2 + OS_1 + OS_2 + OS_3$

subject to:

$X_1 + X_2 + S_1 = 10$

$2X_1 + 3X_2 + S_2 = 5$

$7X_1 + 4X_2 + S_3 = 6$

$X_j \geq 0 \qquad S_i \geq 0$

$j = 1 , 2 \dots n \quad , \quad i = 1 , 2 \dots m$

مثال (8):

Write the following L. P model in the Standard Form

Min $Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3$

subject to:

$X_1 + X_2 - X_3 \geq 5$

$2X_1 + X_2 \geq 6$

$-X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 4$

$X_2 \geq 2$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Solution:

Standard from is:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3 + OS_1 + OS_2 + OS_3 + OS_4$$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 - X_3 - S_1 = 5$$

$$2X_1 + X_2 - S_2 = 6$$

$$-X_1 + X_2 + 2X_3 - S_3 = 4$$

$$X_2 - S_4 = 2$$

$$X_1 , \ldots.. X_3 , S_1 , \ldots.. S_4 \geq 0$$

المرحلة الرابعة: بعد تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغ القياسية وإيجاد الحل الأساسي الأولي Starting Basic Feasible Solution ثم تفريغ المعلومات داخل Simplex table وهذا الجدول يسمى بـ First Alteration بالمرحلة الأساسية الأولى، الآن في هذه المرحلة كيف يتم تحسين قيمة دالة الهدف ذلك عن طريق فحص معاملات المتغيرات في معادلة دالة الهدف فنختار أحد المتغيرات التي لها القدرة على تحسين الحل، ويتم هذا وفق الخطوات التالية:

1- المتغير الداخل: Entering Variable: ويتم تحديد هذا المتغير بموجب شرط الأمثلية Optimality Condition ويسمى بالمتغير الداخل E.V لأنه سوف يدخل إلى عمود المتغيرات الأساسية B.V العمود الأول فيصبح هذا المتغير من المتغيرات الأساسية.

أما أسلوب اختياره فيتم بالنظر إلى معاملات المتغيرات الغير أساسية في دالة الهدف Objective Function فإذا كانت دالة الهدف من نوع Max فنختار المتغير الذي يقابل أكبر رقم سالب فيمثل بالمتغير الداخل E.V

أما إذا كانت دالة الهدف من نوع Min فنختار المتغير الذي يقابل أكبر رقم موجب.

وبعد تحديد المتغير الداخل فإن العمود الذي يعود له يسمى بالعمود المحوري Pivot Column كما هو واضح في الجدول (رقم 3).

2- المتغير الخارج Leaving Variable (L.V): ولاختيار المتغير الخارج من بين المتغيرات الأساسية الموجودة في العمود الأول من الجدول، وذلك بقسمة

الطرف الأيمن R.H.S والمتمثلة بقيم bi آخر عمود في الجدول على القيم المناظرة لها في العمود المحوري (المتغير الداخل) الموجبة فقط، أما السالبة والصفرية تهمل فيتكون لدينا عمود جديدة يسمى بـ Ratio النسب ويوضع إلى جانب عمود R-H-S في الجدول فإن المتغير الخارج L.V هو ذلك المتغير الذي يقابل أصغر نسبة ممكنة، ويسمى الصف الذي يقع فيه المتغير الخارج L.V بالصف المحوري Pivot Row كما هو واضح في الجدول رقم (3).

3- فإن نقطة تقاطع العمود المحوري بالصف المحوري يسمى العنصر المحوري Pivot element وبعد تحديد العنصر المحوري فإذا كانت أكبر من واحد فيجب قسمة الصف الذي يعود له على ذلك العنصر فنكون صف جديد يسمى بالمعادلة المحورية Pivot equation ويكون موقعه داخل جدول جديد يسمى Second iteration أي بكلام آخر:

المعادلة المحورية الجديدة = المعادلة المحورية في مرحلة 1 ÷ عنصر المحوري

Pivot element ÷ old pivot equation = new pivot equation

هذا يعني بعد تحديد المتغير الداخل والخارج وباستخدام optimality and feasible condition نحدد الحل الجديد أو next iteration وباستخدام أسلوب Coauss - Jordan بجعل المتغير الداخل (معاملاته في المعادلات الأخرى ومن ضمنها دالة الهدف مساوية إلى الصفر عدا المعادلة التي يعود لها محور القطب pivot element يجب أن يكون مساوي إلى الواحد).

4- بعد تحديد المعادلة المحورية يمكن جعل جميع معاملات المتغير الداخل في المعادلات الأخرى مساوية إلى صفر كما يلي:

المعادلة الجديدة = المعادلة القديمة – (معاملات العمود الداخل) × المعادلة المحورية الجديدة

أي بكلام آخر نضرب المعادلة المحورية الجديدة في معاملات العمود (المتغير الداخل) عكس الإشارة وتجمع مع المعادلة التي تم اختيار معاملها فنحصل

على المعادلة الجديدة في الجدول الجديد ومن ضمنها دالة الهدف يتم عمل المرحلة الثانية في الجـدول ومسماة بـ Second Iteration وهذه واضحة في الجدول رقم(3).

5- بعد إنجاز الجدول الجديـد نلاحـظ أن قيمـة ($Z = 0$) ازدادت مـن الصـفر إلى قيمـة أكـبر وهذه الزيادة أتت عن طريق زيادة وحدة واحدة من المتغير الداخل.

والآن السؤال هل هذا الجدول يمثـل الحـل الأمثـل Optimal Solution فـالجواب عـلى هـذا السؤال ننظر إلى معاملات دالة الهدف الناتجة فإذا كانت جميع المعاملات مساوية إلى الصفر وموجبة أكبر من الصفر هذا يعني تحقيق الحل الأمثل أما إذا كان هناك متغير سالب فيجب إعادة الخطـوات من (1-5)

First Itration

B.V	n.B.V			B.V			R.H.s	Ratio
	X_1	$X_2 \dots$	X_n	S_1	$S_2 \dots$	S_n		
S_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	1	0	0	b_1	$\frac{b_1}{a_{12}}$
S_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	0	1	0	b_2	$\frac{b_1}{a_{22}}$
.							.	
.							.	
.							.	
S_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	0	0	1	b_m	$\frac{b_m}{a_{m2}}$
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_n$	0	0	0	0	

جدول رقم (3)

بعد صياغة مراحل أسلوب Simplex فيمكن توضيحها كما في المثال التالي:

مثال (9):

Solve the following L. P. M by the simplex method (example 3):

Max $Z = 3X_1 + 2X_2$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 \leq 8$$
$$-X_1 + X_2 \leq 1$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أولاً: نحول النموذج الرياضي إلى الصيغة القياسية بإضافة Slack variable للقيم كما يلي:

Max $Z = 3X_1 - 2X_2 = 0$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 6$$
$$2X_1 + X_2 + S_2 = 8$$
$$-X_1 + X_2 + S_3 = 1$$
$$X_2 + S_4 = 2$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4 \geq 0$$

ثانياً: الحل الأساسي الأولي

$X_1 = X_2 = 0$ non - basie variable

$S_1 = 6$ $S_3 = 1$

$S_2 = 8$ $S_4 = 2$

$Z = 0$

ثالثا: نكون الجدول Simplex tablue وباستخدام الخطوات من 1 إلى 3:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S	Ratio
S_1	1	2	1	0	0	0	6	6/1 = 6
S_2	2	1	0	1	0	0	8	8/2 = 4
S_3	-1	1	0	0	1	0	1	يهمل
S_4	0	1	0	0	0	1	2	يهمل
Z	-3	-2	0	0	0	0	0	

pivot

First Iteration

ننظر إلى معاملات دالة الهدف نختار أكبر رقم سـالب ليمثـل المتغـير الـداخل فيكـون X_1 هـو المتغير الداخل E.V أما لاختيار المتغير الخارج L.V من بين المتغيرات الأساسـية وذلـك بقسـمة الطـرف الأيمن R.H.S على معاملات المتغير الداخل X_1 الموجبة فقط كـما هـو واضـح في Ratio فنختـار أصـغر نسبة ممكنة فتمثل المتغير الخارج L.V فهنا يكون S_2 ليحل محله X_1 كما هو واضح في الجدول أعـلاه (First Iteration).

وباستخدام خطوة 4 و 5 نحصـل عـلى الجـدول الجديـد (Second Iteration) أمـا العمليـات الحسابية واضحة تحت الجدول:

Second Iteration

	B.V	X_1	X_2 ↓	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H	Ratio
L.V	S_1	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	2/3/2
	X_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4	4/1/2
	S_3	0	3/2	0	1/2	1	0	5	5/3/2
	S_4	0	1	0	0	0	1	2	2/1
	Z	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	

هذه هي المعادلة المحورية الجديدة ولجعل جميع معاملات العمـود X1 مسـاوية إلى الصـفر ومن ضمنها دالة الهدف نتبع الخطوات التالية:

1) S_1 – equation:

معادلة S_1	1	2	1	0	0	0	6	
معادلة محورية جديدة × 1-	-1	-1/2	0	-1/2	0	0	-4	بالجمع
معادلة جديدة إلى S_1	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	

2) S_3 – equation:

معادلة S_3	-1	1	0	0	1	0	1	
معادلة محورية جديدة × 1	1	1/2	0	1/2	0	0	4	بالجمع
معادلة جديدة إلى S_3	0	3/2	0	½	1	0	5	

3) S_4 – equation:

معادلة S_4	0	1	0	0	0	1	2

بما أن معامل معادلة S_4 لدى العمود X_1 مساوي إلى الصفر فتبقى كما هي:

4) Z – equation:

معادلة Z	-3	-2	0	0	0	0	0	
معادلة محورية × 3	3	2/3	0	2/3	0	0	12	بالجمع
معادلة Z جديدة	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	

وبعد هذه العمليات الحسابية لتحويل المتغير الداخل الغير أساسي إلى متغير أساسي والمتغير الخارج الأساسي إلى متغير غير أساسي يتكون لدينا المرحلة الثانية من جداول الطريقة المبسطة (سمبلكس) ويمكن مشاهدة التغير الواضح لكل من عمود X1 و عمود S2

والآن نسأل السؤال التالي هل توصلنا إلى الحل الأمثل في (Second Iteration)

الجواب على هذا السؤال ننظر إلى معاملات دالة الهدف فإذا كانت جميع المعاملات موجبة ومساوية إلى الصفر يعني تحقق الحل الأمثل أما إذا جواب لا ننتقل إلى الخطوة 4.

رابعاً: ننظر إلى معاملات دالة الهدف Cj في الجدول Second Iteration فهناك معامل سالب يساوي $-\frac{1}{2}$ فالمتغير الذي يقابله هو X2 وبتكرار الخطوات الحسابية السابقة E.V و L.V نتوصل إلى الجدول رقم Iteration 3^{rd} كما يلي:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.s
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	12 2/3

3^{rd} Iteration

أما الخطوات كانت كما يلي:

المعادلة المحورية الجديدة بعد قسمة صف المتغير الخارج على محور القطب pivot element

$$(0 \quad \frac{3}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 2) \div \frac{3}{2}$$

$$0 \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{4}{3}$$ معادلة محورية pivot

X_1 – equation:

معادلة X_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4	
معادلة محورية × 1/2-	0	-1/2	-1/3	1/6	0	0	-2/3	بالجمع
معادلة X_1 الجديدة	0	0	-1/3	2/3	0	0	10/3	

S_3 – equation:

معادلة S_3	0	3/2	0	1/2	1	0	5	
معادلة محورية × 3/2-	0	-3/2	-1	1/2	0	0	-2	بالجمع
معادلة S_3 الجديدة	0	0	-1	1	1	0	3	

S_4 – equation:

معادلة S_4	0	1	0	0	0	1	2	
معادلة المحورية × 1-	0	-1	-2/3	1/3	0	0	-4/3	بالجمع
معادلة S_4 الجديدة	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3	

Z – equation:

معادلة Z	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	
معادلة محورية × 1/2	0	1/2	1/3	-1/6	0	0	2/3	بالجمع
معادلة Z الجديدة	0	0	1/3	4/3	0	0	12 2/3	

بعد هذه العمليات الحسابية وإدراج النتائج في جدول Iteration 3rd نلاحظ أن جميع معاملات دالة الهدف هي صفرية وموجبة هذا يعني تحقق الحل الأمثل optimal solution:

$$X_1 = \frac{10}{3} \qquad X_2 = \frac{4}{3} \qquad Z = 12\frac{2}{3}$$

هذا يعني بعد إنتاج $\frac{10}{3}$ من X1 و $\frac{4}{3}$ من X2 أدى إلى زيادة في دالة الهدف من صفر إلى $12\frac{2}{3}$ وكان هناك فائض في القيد الثالث ومقداره 3 = S_3

وفائض في القيد الرابع وهو $S_4 = 2/3$ في حين أن جميع المتغيرات الغير أساسية أصبحت أساسية.

ملاحظة: ذكرنا ضمن الحل كلمة optimal condition feasibility condition فإن المقصود بها:

شرط الأمثلية optimal condition المتغير الداخل EV في (Min , Max) هو متغير غير أساسي الذي يقابل أكبر معامل سالب (موجب) في دالة الهدف ليصبح متغير أساسي والتي تم تحديد بموجب شرط الأمثلية.

شرط الملائمة Feasibility Condition (في حالة Max أو Min) فإن المتغير الخارج الذي يقابل أصغر نسبة موجبة الذي يترك عمود المتغيرات الأساسية.

مثال (10):

Find the optimal solution for the following problem:

Max $Z = 40X_1 + 30X_2$ دالة الهدف

subject to:

$3X_1 + 5X_2 \leq 6000$ ماكنة قطع

$4X_1 + 2X_2 \leq 4000$ ماكنة طباعة

$5X_1 + X_2 \leq 4000$ الأيدي العاملة

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية:

Max $Z - 40X_1 - 30X_2$ دالة الهدف

subject to:

$3X_1 + 5X_2 + S_1 = 6000$

$4X_1 + 2X_2 + S_2 = 4000$

$5X_1 + X_2 + S_3 = 4000$

$X_1 , X_2 , S_1 S_2 , S_3 \geq 0$

الحل الأساسي الأولي S.B.F.S

$X_1 = X_2 = 0$

$S_1 = 6000 \quad S_2 = 4000 \qquad S_3 = 4000$

حسين الحل بعد إنتاج عدد من الوحدات من كل X_1 و X_2 وذلك كما يلي:

		B.V	n.B.V		B.V			R.H.s	Ratio
			X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Ist Iteration	(1)	S_1	3	5	1	0	0	6000	2000
	(2)	S_2	4	2	0	1	0	4000	1000
	(3)	S_3	5	1	0	0	1	4000	8000
		Z	-40	-30	0	0	0	0	
2 end iteration		S_1	0	$\frac{22}{5}$	1	0	-3/5	3600	818.18
		S_2	0	6/5	0	1	-4/5	800	666.66
		X_1	1	1/5	0	0	1/5	800	4000
		Z	0	-22	0	0	+8	32000	
3^{rd} iteration		S_1	0	0	1	-11/3	7/3	2000/3	
		X_2	0	1	0	5/6	-4/6	666.66	
		X_1	1	0	0	-1/6	1/3	2000/3	
		Z	0	0	0	110/6	40/6	46666.6	

Optimal solution

تحقق الحل الأمثل لأن جميع معاملات دالة الهدف موجبة وصفرية وتم إنتاج:

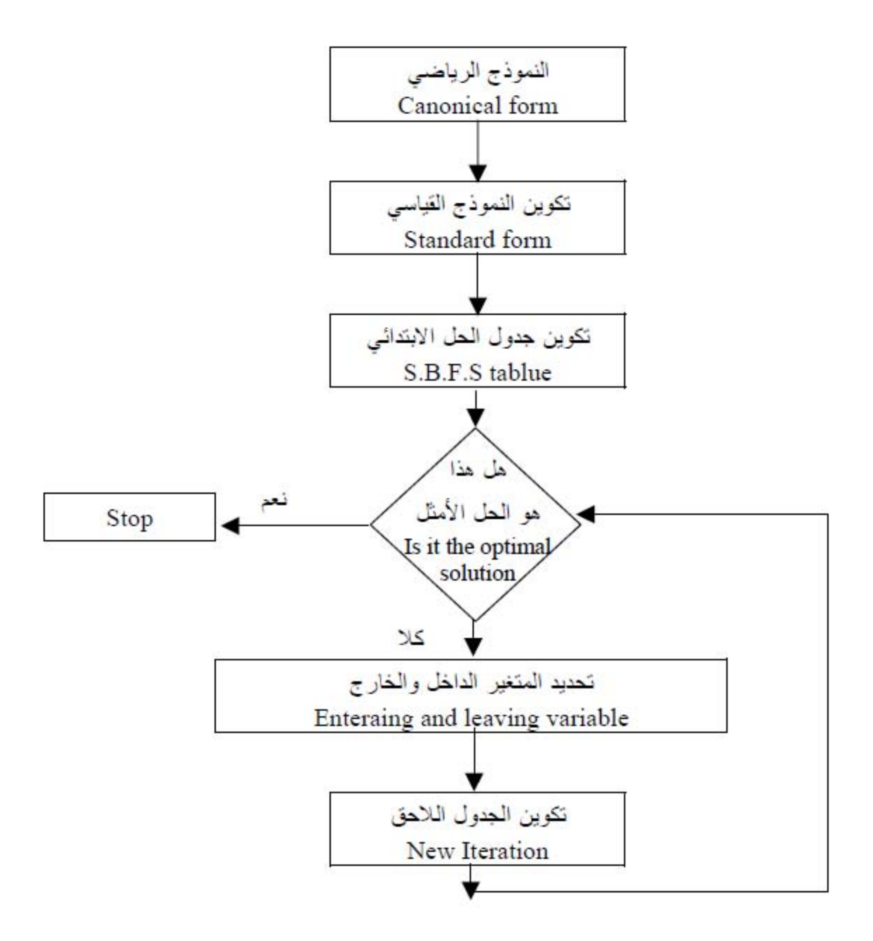
$X_1 = \frac{2000}{3} \qquad X_2 = \frac{2000}{3}$

وتم تحقيق ربح قدره $Z = 46666.6$

وكان هناك فائض من القيد الأول $S_1 = \frac{2000}{3}$ والمتمثل بالزمن من ماكنة القطع.

إن العمليـات الحسـابية السـابقة، أدت إلى الحصـول عـلى الحـل الأمثـل Optimal Solution

وهذه الخطوات يمكن توضيحها أو التعبير عنها من خلال المخطط الانسيابي التالي:



2-4-3 المتغيرات الاصطناعية Artificial Variables:

The minimization case: The structural constraints here are of the "greater than or equal to" type. The converting the inequalities into equation requires the subtraction rather than the addition of "slack" variables.

And as we know the (Si) are restricted to nonnegative values, and each has a cost coefficient of Zero. We face a negative value for the slack variables. Yet we know that the trivial initial solution in the simplex method, as we have seen in the last section is always obtained by letting all the structural variables (Xj) equal to Zero.

We propose, therefore, at this stage, to modify the statement of our problem, by introducing in to original inequalities, in addition to the regular slack variables, the so called "artificial" slack variables.

The "artificial variables" will be represented by Capital letter Ri with proper subscript.

عندما تكون القيود من نوع أكبر ويساوي ≥ أو مسارات =، فلا وجود للحل الأساسي الأولي have no starting basic feasible solution لأن المتغيرات التكميلية slack variables المضافة إلى هذا النوع من القيود تكون ذا معامل 1- أو معامل صفر في حال قيد المساواة وبما أن من شروط الحل الأساسي الأولي أن جميع المتغيرات يجب أن تكون موجبة لذا يقال لا وجود للحل الأساسي الأولي ويمكن توضيحها كما في المثال التالي:

مثال (11):

Minimize $Z = 4X_1 + X_2$

subject to:

$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution:

الصيغة القياسية Standard From لهذا المثال بإضافة Slack variable إلى القيود نلاحظ أن القيد الأول من نوع المساواة لا حاجة إلى S.V أما القيد الثاني من نوع أكبر ويساوي لذا فيكون S.V هو فائض أي نطرح S2- من القيد الثاني لجعله مساوي للطرف الأيمن ويسمى بـ Surplus S2 أما القيد الثالث فيضاف له S3 لأن نوع القيد ≤ أصغر ويساوي كما يلي:

Minimize $Z = 4X_1 + X_2$

subject to:

$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 4$$
$$X_1 , X_2 , S_2 , S_3 \geq 0$$

ففي هذه الحالة S.B.F.S معدوم أي:

$X_1 = X_2 = 0$

لا وجود للحل بالنسبة للقيد الأول لأن:

$0 = 3$

أما بالنسبة إلى القيد الثاني فإن:

$-S_2 = 6 \qquad S_2 = -6$

هذا أيضاً لا يجوز قيمة سالبة في الطرف الأيمن.

لذا يجب تعديل الحل للحصول على الحل الأساسي الأولي أو الابتدائي، لذا فإن فكرة استخدام المتغيرات الاصطناعية Artificial Variables بسيطة وتبنى على أساس استخدام هذا النوع من المتغيرات عندما يكون هناك قيد واحد أو أكثر بعلامة (= أو >) مساواة أو أكبر من لذا نضيف متغيرات موجبة nonnegative variable للطرف الأيسر لكل معادلة لا تملك حل أساسي أولي، والمتغيرات التي تضاف للقيود هذه يجب أن تكون نفس شروط المتغيرات التكميلية ويرمز للمتغيرات الاصطناعية بالرمز Ri حيث $i = 1, 2, .. m$ بقدر عدد القيود التي تكون من نوع (= أو ≥).

ولإيجاد الحل في مثل هذه الحالات هناك أسلوبين وهما:

1- أسلوب M الكبيرة Big – M - Method

2- أسلوب المرحلتين Two – Phase method

1- الأسلوب الأول (أسلوب M) Big – M - method:

أو في بعض الأحيان يسمى M-Technique (Method of Penalty)

أما خطوات حل النموذج الرياضي Mathematical Method باستخدام المتغيرات الاصطناعية Artificial variables هي كالآتي:

1- يحول النموذج الرياضي إلى الصبغة القياسية Standard Form.

2- تضاف المتغيرات الاصطناعية الموجبة nonnegative variable (Ri) إلى كل معادلة من معادلات الصيغة القياسية التي يكون فيها Slack variable

(S.V) ذو إشارة سالبة أو يكون (S.V) معدوم أي بمعامل صغر أي في حالة القيد من نوع المساواة أما في القيود التي تكون أصغر من ≤ فلا يضاف إليها Ri وإنما S.V لأن المتغيرات التكميلية قادرة على المساهمة في تحسين الحل.

فإن إضافة المتغيرات الاصطناعية (Ri) لا يغير من قيم متغيرات القيد لأن هذه المتغيرات Ri ستكون قيمها صفر عندما تبلغ الحل الأمثل للمسالة في حالة وجود حل ملائم لها optimal condition أما إذا لم يكن هناك حل ملائم للمسألة فإنه سيكون على الأقل واحد من هذه المتغيرات الاصطناعية له نتيجة موجبة في الحل النهائي، وهذا لا يجوز ففي مثل هذه الحالة يقال ليس هناك حل ملائم.

إن الزيادة الناجمة عن إضافة المتغيرات الاصطناعية يتم التخلص منها عن طريق تخصيص جزء مقابل يضاف إلى دالة الهدف Objective Function وهذا الجزء يكون كبيراً جداً ويرمز له M لكل متغير اصطناعي يستخدم في حل النموذج وتكوّن معامل M سالبة إذا كانت دالة الهدف Maximum أي (M-) أما في حالة دالة الهدف Minimum تكون إشارة M موجبة أي (M+)، لذا سمي هذا الأسلوب بأسلوب 1م.

3- أما موقع المتغيرات الاصطناعية في جدول الحل الابتدائي سيكون في عمود المتغيرات الأساسية Basic Variables لذا تمثل الحل الأساسي الأولي للقيد الذي يعود له، أما بقية المتغيرات فتكون غير أساسية non-basic.

4- أما معاملات دالة الهدف في الجدول الأساسي الأولي فيمكن إيجادها بعد إضافة المتغيرات الاصطناعية وكما في المعادلة التالية:

معادلة دالة الهدف الجديدة = معادلة دالة الهدف القديمة + M × معادلة R1 + M × معادلة R2 + ... + M × معادلة Ri.

5- تطبق جميع خطوات أسلوب سمبلكس Simplex إلى أن تصل إلى الحل الأمثل حيث تكون معاملات Ri في دالة الهدف مساوية إلى الصفر، هذا يعني تحقق الحل الأمثل وحسب الشروط المعروفة بالنسبة للمتغيرات الأخرى، والمثال التالي يبين خطوات أسلوب M

مثال (12):

Find the optimal solution for the following L.P model using M technique

$$\text{Min} \quad Z = 4X_1 + X_2$$

subject to:

$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution:

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة القياسية:

$$\text{Min} \quad Z = 4X_1 + X_2$$

subject to:

$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 4$$
$$X_1 , X_2 , S_2 , S_3 \geq 0$$

بما أن القيد الأول والثاني لا تملك حل أساسي لكن القيد الثالث S3 لها حل أساسي أولي لذا نضيف المتغير الاصطناعي artificial variable لكل من القيد الأول بـ R1 والقيد الثاني R2 أما معاملات هذه المتغيرين في دالة الهدف سيكون MR2 + MR1 لأنها نهاية صغرى فيكون:

$$\text{Min} \quad Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$$

subject to:

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 4$$
$$X_1 , X_2 , S_2 , S_3 , R_1 , R_2 \geq 0$$

ومن النموذج أعلاه يمكن اعتبار S3, R2, R1 هما الحل الأساسي الأولي Starting basic solution ويمكن تحديد الجدول الأولي كما يلي:

Basic	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.H.S
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	1	2	0	0	0	1	4
Z	-4	-1	0	-M	-M	0	0

قبل استخدام خطوات حل نموذج سمبلكس نحتاج تعديل دالة الهدف (صفZ) أي التخص من M- من كل العمود R_1 و R_2.

من الجدول أعلاه عندما X1 = X2 = S2 = O والمؤدية إلى حل أولي أساسي بـ S3 = 4, R2 = 6, R1 = 3 وهذا الحل يعطي قيمة دالة الهدف (Z = 9M) محسوبة كما يلي:

M x 3 + M x 6 = 9M بدلاً من الصفر كما مبين من الطرف الأيمن للصف Z من الجدول، وهذا يعود لأن R2, R1 لديهما معاملان في دالة الهدف وهما ($-M_1$, $-M_2$) مقارنة بكل Slack variables كما كان في المثالين السابقين كان مساوياً إلى الصفر، ويمكن اختزال معاملي R2, R1 من دالة الهدف إلى الصفر، وهناك أسلوبين يمكن استخدامهما لجعل Ri فـ(R2 , R1) في دالة الهدف (Z) مساوية إلى الصفر ويمكن اختيار أحدهما للعمل عليه، ولكن سوف نذكر الأسلوبين:

الأسلوب الأول: نحسب قيم Ri المتغيرات الاصطناعية Artificial variable (R2, R1) في هذا المثال ومن المعادلتين التي تحويهما أي معادلة 1 ومعادلة 2 كما يلي:

$$R_1 = 3 - 3X_1 - X_2 \qquad (1)$$

$$R_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2 \qquad (2)$$

وبتعويض هذه القيم R2, R1 في دالة الهدف (Z) للحصول على دالة الهدف الجديدة بمعامل مساوي إلى الصفر لكل من R2, R1 ولباقي المتغيرات الأساسية والمتمثلة بالحل الأساسي الأولي كما يلي:

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 + M(3 - 3X_1 - X_2) + M(6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2)$$

وبالتبسيط فإن Z تكون:

$$Z = 4X_1 + X_2 + 3M - 3MX_1 - MX_2 + 6M - 4MX_1 - 3MX_2 + MS_2$$

$$Z = 4X_1 - 3MX_1 - 4MX_1 + X_2 - MX_2 - 3MX_2 + 3M + 6M + MS_2$$

$$= (4 - 7M)\,X_1 + (1 - 4M)\,X_2 + MS_2 + 9M$$

وينقل كل المتغيرات للطرف الأيسر والمحافظة على الكمية الثابتة من الطرف الأيمن فإن المعادلة تمثل دالة الهدف الجديدة:

$$Z - (4 - 7M)\,X_1 - (1 - 4M)\,X_2 - MS_2 = 9M$$

ومن هذه المعادلة نلاحظ أن كل من R2, R1 معاملاتهما مساوية إلى صفر في دالة الهدف هذا يعني تحقق الحل الأساسي S, B, F, S والذي ينص على:

$Z = 9M$

$R_1 = 3$ $\qquad R_2 = 6$ $\qquad S_3 = 4$

وأن كل من $X_1 = X_2 = S_2 = 0$ متغيرات غير أساسية

الأسلوب الثاني: للتوصل إلى قيم معاملات R2, R1 في دالة الهدف والتي يجب أن تساوي صفر باستخدام أسلوب الاختزال المحوري، أي باستخدام الجدول tablue طبعاً هذه أبسط الصور المستخدمة حيث يتم مباشرة حساب قيمة معاملات دالة الهدف الجديدة (New objective function of Z) وكما يلي:

	B.V	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.H.S	Ratio
نضرب المعادلة × +M	(1) R_1	3	1	0	1	0	0	3	1
نضرب المعادلة × +M	(2) R_2	4	3	-1	0	1	0	6	3/2
	(3) S_3	1	2	0	0	0	1	4	4
Old O.F of (Z)	Z	-4	-1	0	-M	-M	0	0	
بجمع المعادلتين مع	MR_1	3M	1M	0	M	0	0	3M	
دالة الهدف القديمة	MR_2	4M	3M	-M	0	M	0	6M	
New Z	(4) Z	(-4 +7M)	(-1 +4M)	-M	0	0	0	9M	

وبعد حذف دالة الهدف القديمة وعمليات الضرب والجميع في الجدول ليحل محلهم دالة الهدف الجديدة حيث $Z = 9M$

وأن الحل الأساسي الأولي S-B-F-S هو:

$R_1 = 3$ $\qquad R_2 = 6$ $\qquad S_3 = 4$

وأن هذا الجدول جاهز لاستخدام خطوات أسلوب سيمبلكس Simplex method بالبحث على optimality condition و Feasibility condition وبما أن دالة الهدف من نوع Minimization لذا نختار المتغير الداخل Entering variable الذي يقابل أكبر معامل موجب في دالة الهدف والمساوية إلى 7M + 4– والذي يقابل المتغير X1 هذا يعني أن X1 هو المتغير الداخل، أما لاختيار المتغير الخارج Leaving variable والمقابلة لأصغر نسبة ممكنة Ratia (بقسمة R.H.S على المعاملات الموجبة للمتغير الداخل) فإن R1 هو المتغير الخارج L.V.

وبعد تحديد المتغير الداخل E.V والمتغير الخارج L.V يمكن التوصل إلى جدول جديد tablue أو new iteration باستخدام أسلوب (Gauss - Jordan operation) نلاحظ أن دالة الهدف الجديدة لهذا الجدول حسبت بعد ضرب المعادلة المحورية بـ (-4+7M)- وإضافة الجواب إلى معاملات دالة الهدف في جدول رقم 1 أي 1st Iteration فإن الجدول الجديد أو 2end Iteration هو:

B.V	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.H.S	Ratio
X_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1	3
R_2	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2	6/5
S_3	0	5/3	0	-1/3	0	1	3	5
Z	0	$\frac{1+5M}{3}$	-M	$\frac{4-7M}{3}$	0	0	4+2M	
X_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/3	
X_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5	
S_3	0	0	1	1	-1	1	1	
Z	0	0	3/15	$\frac{8}{5}-M$	$\frac{-1}{5}-M$	0	18/5	
X_1	1	0	0	2/5	0	-1/5	2/5	
X_2	0	1	0	-1/5	0	3/5	9/5	
S_2	0	0	1	1	-1	1	1	
Z	0	0	0	$\frac{7}{5}-M$	-M	-1/5	17/5	

Optimal solution

جميع معاملات دالة الهدف سالبة وصفرية هذا يعني تحقق الحل الأمثل optimal Solution

$X1 = 2/3$ $X2 = 9/5$ $Z = 17/5$

ولكن هناك فائض من القيد الثاني ما يساوي إلى الواحد أي أن S2 = 1 غير مستغل من الموارد المتاحة لدى هذا القيد.

نلاحظ هنا لو نظرنا إلى الجدول النهائي والمتمثل بالحل الأمثل نلاحظ أن معامل R2, R1 حيث رجعت قيمة M لكل منهما كما كان عليه في دالة الهدف عند الصيغة القياسية.

2- الأسلوب الثاني: أسلوب المرحلتين Two phase method:

أسلوب المرحلتين Two-phase method أكثر شيوعاً واستخداماً من أسلوب Big M technique لأن أسلوب Big M معتمدة على قيمة M الكبيرة يمكن أن يقع الفرد في الخطأ نتيجة فرض هذه القيمة M أما أسلوب المرحلتين خففت من هذه المشكلة وكيفية التخلص من M ومن اسمها يتم العمل فيها عبر مرحلتين:

المرحلة الأولى Phase I:

تستبدل دالة الهدف الأصلية للمسألة بدالة هدف أخرى جديدة والتي تعبر عن مجموع المتغيرات الاصطناعية artificial variable المضافة إلى القيود constraint وهذه الدالة تكون دالة تصغير Minimize بغض النظر فيما إذا كانت دالة الهدف للمسألة الأصلية Minimum أو Maximum ويرمز لهذه الدالة بأي حرف من الحروف الهجائية وسنرمز لها بالحرف W هذا يعني أن دالة الهدف W ذو النهاية صغرى متمثلة بمجموع المتغيرات الاصطناعية التي تستخدم لحل نموذج البرمجة الخطية Linear programming model.

$Min\ W = R1 + R2 + R3 + \ldots$ دالة بديلة

أما بقية قيود المسألة فيتم تحويلها إلى الصيغة القياسية ونستخدم artificial variable كما ذكرنا سابقاً مع القيود من نوع (= أو $\geq$) بعد ذلك نضع جميع

معاملات المعادلات التي تعبر عن المسألة في جدول الحل الابتدائي للمرحلة الأولى واول خطوة هي تعديل دالة الهدف البديلة لتصبح دالة هدف معدلة.

أي دالة الهدف المعدلة = دالة الهدف البديلة + معادلة R1 + معادلةR2 + ... وبنهاية هذه الخطوة يكون جدول الحل الابتدائي قد اكتمل مبتدءا بالحل باستخدام خوارزمية الطريقة المبسطة Simplex وشرطي الأمثلية والملائمة optimal condition and feasibility condition إلى أن تصبح دالة الهدف فيهاً تساوي الصفر (W = 0) وأن جميع المتغيرات الاصطناعية متغيرات غير أساسية أي تخرج من عمود Basic variable وتصبح قيمها مساوية إلى واحد وباقي المتغيرات قيمها مساوية إلى صفر هذا يعني انتهاء المرحلة الأولى End of phase one هذا يعني أن المسألة لها حل ملائم فننتقل إلى المرحلة الثانية Phase II، أما إذا لم تظهر لنا النتائج التي أشرنا إليها في نهاية جدول المرحلة الأولى أي بقاء أحد المتغيرات الاصطناعية في عمود المتغيرات الأساسية هذا يعني أن المسألة غير قابلة للحل وبالتالي لا يمكن الانتقال إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية Phase II:

في هذه المرحلة نستخدم الجدول الذي يمثل آخر جدول من المرحلة الأولى Phase I والمتمثل بالحل الأمثل لتلك المرحلة (الجدول الأخير) باستثناء دالة الهدف فإننا نستخدم دالة الهدف الأصلية للنموذج الرياضي للمشكلة بدون المتغيرات الاصطناعية وإنما فقط بالمتغيرات Xj والمتغيرات Slack variable التكميلية أي أن الجزء الأخير لجدول السمبلكس Simplex tablue في المرحلة الأولى سوف يعتبر بمثابة الجدول الأول في المرحلة الثانية مع تغير دالة الهدف حسب الإجراءات السابقة، ومن هنا يتم تحسين الحل ويجب ملاحظة ما يلي أن جميع المتغيرات الأساسية في عمود Basic variable يجب أن تكون قيمتها مساوية إلى الصفر في دالة الهدف (فإن الخطوة الأولى هنا هي جعل معاملات Basic variable والناتجة من الحل الأمثل في المرحلة الأولى phase I الموجودة في عمود basic variable

في دالة الهدف مساوية إلى الصفر وذلك عن طريق ضرب معادلة المتغير الأساسي بمقدار يساوي قيمة نفس المتغير في معادلة دالة الهدف عكس الإشارة ثم يجمع الناتج عملية الضرب هذه مع معاملات معادلة دالة الهدف كل ما يناظره من معامل، وذلك بهدف جعل معامل Basic variable في دالة الهدف يساوي إلى الصفر أي يأخذ شروط المتغير الأساسي (يكون معامل المتغير الأساسي في المعادلة التي تعود لها مساوي إلى الواحد وفي جميع المعادلات (القيود) الأخرى مساوية إلى صفر ومن ضمنها دالة الهدف).

وبتكرار العمل لبقية المتغيرات الأساسية ويمكن إجراء العمليات على المتغيرات الأساسية في آن واحد وجمعها في آن واحد مع دالة الهدف الموجودة ومن ثم نبدأ بتطبيق الطريقة المبسطة وشرط الأمثلية والملائمية إلى أن تبلغ الحل الأمثل للمسألة الثانية وهذا الحل سيكون هو الحل الأمثل للمسألة optimal solution.

ويمكن تلخيص الخطوات كما يلي:

1- الجدول الأولي للمرحلة الثانية يمثل آخر جدول من المرحلة الأولى ما عدا دالة الهدف.

2- نستعين بدالة الهدف الأصلية لتحل محل دالة الهدف في المرحلة الأولى.

3- ننظر إلى معاملات دالة الهدف فيجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية والموجودة في عمود المتغيرات الأساسية إلى الصفر فإذا كان جواب لا فيجب جعلها مساوية إلى صفر باستخدام أحد مراحل الخوارزمية السابقة.

نلاحظ أن أسلوب المرحلتين خالية من قيم M الكبيرة لذا فإن مجال استخدامها أسهل في تبسيط المتغيرات للوصول إلى الحل الأمثل والمثال التالي يبين خطوات العمل السابقة.

مثال (13):

Find the optimal solution for the following linear programming model by using two phase method:

Minimize $Z = 4X_1 + X_2$

subject to:

$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution:

المرحلة الأولى Phase I

نكـون دالـة هـدف جديـدة بصـيغة Minimum والمتمثلـة بمجمـوع المتغـيرات الاصـطناعية Artificial variable

Min $\quad W = \sum_{i=1}^{m} \Re_i$

Min $\quad W = \Re_1 + \Re_2 + \ldots..$

أولاً: تحول المسألة إلى الصيغة القياسية Standard Form

Min $\quad Z = 4X_1 + X_2$

subject to:

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 4$$
$$X_1 , X_2 , R1 , S_2 , R_2 , S_3 \geq 0$$

ثانياً: نبدأ بالمرحلة الأولى Phase I

تكـون دالـة هـدف جديـدة بصـيغة Minimum والمتمثلـة بمجمـوع المتغـيرات الاصـطناعية Artificial variable

Min $\quad W = \sum_{i=1}^{m} \Re_i$

Min $\quad W = R_1 + R_2$

وهذه الدالة تكون وفقاً إلى قيود المسالة الأصلية (Subject to constraint) وتظهر كما يلي:

$$\text{Min} \quad W = R_1 + R_2$$

subject to:

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 4$$

$$X_1 , X_2 , R1 , S_2 , R_2 , S_3 \geq 0$$

ثالثا: نكون جدول أولي للنموذج أعلاه

	Basic	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.H.s	
(1)	R_1	3	1	0	1	0	0	3	
(2)	R_2	4	3	-1	0	1	0	6	
(3)	S_3	1	2	0	0	0	1	4	
	W	0	0	0	-1	-1	0	0	بالجمع
$1 \times R_1$		3	1	0	1	0	0	3	بالجمع
$1 \times R_2$		4	3	-1	0	1	0	6	بالجمع
W دالة الهدف الجديدة		7	4	-1	0	0	0	9	

هنا قمنا بتعديل دالة الهدف لأن معامل R2, R1 الأساسي في دالة الهدف تساوي إلى (1-) ويجب أن تكون صفر لذا ضرب معادادة رقم 1 في معامل R1 عكس الإشارة وكذلك معادلة رقم 2 في معامل R2 عكس الإشارة.

وبعد جمع هذه المعادلات الناتجة مع دالة الهدف نحصل على دالة الهدف الجديدة وهي كما موضحة في الجدول:

ملخص الكلام:

$$\text{Old w row} + \{(1 \times R_1 , \text{row}) + (1 \times R_2 , \text{row})\} = \text{New w , row}$$

فإن الجدول الأساسي الأولي يكون كما يلي:

	Basic	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	R.H.s	Ratio
(1)	R_1	3	1	0	1	0	0	3	3/3=1
(2)	R_2	4	3	-1	0	1	0	6	6/4=3/2
(3)	S_3	1	2	0	0	0	1	4	4/1=4
	W	7	4	-1	0	0	0	9	
(1) ÷ 3 = ($'$1)	X_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1	3
-4($'$1)+ (2)= ($'$2)	R_2	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2	6/3
-1($'$1)+ (3)= ($'$3)	S_3	0	5/3	0	-1/3	0	1	3	9/3
-7($'$1)+ (4)= ($'$4)	W	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2	
-1/3($'$2)+ ($'$1)= ($''$1)	X_1	1	0	1/3	3/5	-1/5	0	3/5	
3/5× ($'$2) ($''$2)	X_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5	
-5/3($''$2)+ ($'$3)= ($''$3)	X_3	0	0	1	1	-1	1	1	
-5/3($''$2)+ (4)	W	0	0	0	-1	-1	0	0	

End of phase I

انتهاء المرحلة الأولى نلاحظ أن جميع معاملات دالة الهدف مساوية إلى الصفر ما عدا R2, R1 حيث تأخذ أصل معاملاتها كما كانت في دالة الهدف الأولية أي (1-) والنقطة المهمة هـو نحـن قلصـنا قيمة W من 9 إلى صفر بإنهاء المرحلة الأولى وهذا يعني أن للمسألة حل أسـاسي Feasible solution لذا تنتقل للمرحلة الثانية.

المرحلة الثانية Phase II

كما ذكرنا سابقاً نستخدم أخر جدول توصلنا إليه في المرحلة الأولى بعد حـذف عمـود R2, R1 منها لتوصلنا للحل الأساسي الأولي ما عدا دالة الهدف علينا أن نستخدم معاملات دالة الهدف الأصـلية للمسألة والانتباه إلى دالة الهدف الأصلية إذا كانت مـن صـيغة Max أو Min، ففـي هـذا السـؤال إن دالة الهدف كانـت مـن نـوع Min ‏(Min Z = 4X1 + X2) فـإن جـدول الحـل الأسـاسي الأولي لهـذه المرحلة يصبح كما يلي:

	Basic	X_1	X_2	S_2	S_3	R.H.s
(1)	X_1	1	0	1/5	0	3/5
(2)	X_2	0	1	-3/5	0	6/5
(3)	S_3	0	0	1	1	1
(4)	Z	-4	-1	0	0	0

لو نظرنا إلى دالة الهدف نلاحظ أن معامل X1 وهو متغير أساسي يساوي4- وكذلك معامل X2 والذي يجب أن يكون مساوياً إلى الصفر هو –1 لذا يجب جعل معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف مساوية إلى الصفر لذا نضرب معادلة X1 في 4 ومعادلة X2 في 1 ثم جمعهم مع دالة الهدف الموجودة كما يلي:

	Basic	X_1	X_2	S_2	S_3	R.H.s	
(1) × 4	X_1	1	0	1/5	0	3/5	
(2) × 1	X_2	0	1	-3/5	0	6/5	
(3)	S_3	0	0	1	1	1	
	Z	-4	-1	0	0	0	
	$4X_1$	4	0	4/5	0	12/5	بالجمع
	$1X_2$	0	1	-3/5	0	6/5	
دالة الهدف الجديد (4)	Z	0	0	1/5	0	18/5	

ننظر الآن إلى جميع معاملات دالة الهدف للتحقق من الأمثلية إذا كانت جميعها سالبة وصفرية أما إذا لا فنحسن الحل بأخذ متغير داخل وخارج فهنا لدينا معامل موجب يناظر S2 لذا فإن S2 متغير داخل E-V أما المتغير الخارج L-V الذي يقابل أصغر نسبة والذي يقابل S3 كما موضح في الجدول التالي:

	Basic	X_1	X_2	S_2	S_3	R.H.s
-1/5 (3) + (1)	X_1	1	0	0	-1/5	2/5
3/5 (3) + (2)	X_2	0	1	0	3/5	9/5
(3)	S_3	0	0	1	1	1
-1/5 (3) + (4)	Z	0	0	0	-1/5	17/5

End phase II

Optimal solution:

حيث:

$$X_1 = \frac{2}{5}$$

$$X_2 = \frac{9}{5}$$

$$Z = \frac{17}{5}$$

surplas $S_2 = 1$ فائض عن الحاجة

مثال (14):

Find the optimal solution for the following linear programming model using Big-M Technique

Min $Z = 2X_1 + X_2$

s.t.:

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$4X_1 + 2X_2 \geq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution:

أولاً: نحول صيغة النموذج أعلاه إلى الصيغة القياسية

Min $Z = 2X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$

s.t.:

$$X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30$$

$$4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 \geq 0$$

ثانياً: إنشاء جدول يمثل النموذج أعلاه ويتم حله وفق القواعد السابقة للوصول إلى الحل الأمثل.

	Basic variable	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	R.H.s	Ratio
(1)	R_1	1	3	-1	0	1	0	30	10
(2)	R_2	4	2	0	-1	0	1	40	20
	Z	-2	-1	0	0	-M	-M	0	
	MR_1	M	3M	-M	0	M	0	30M	
	MR_2	4M	2M	0	-M	0	M	40M	
(3)	Z	-2+5M	-1+5M	-M	-M	0	0	70M	
(1)÷3	X_2	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10	30
	R_2	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	20	6
	Z	$\frac{-5+10M}{3}$	0	$\frac{-1+2M}{3}$	-M	$\frac{1-5M}{3}$	0	10+20M	
	X_2	0	1	-2/5	1/10	2/5	-1/10	8	
	X_1	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	6	
	Z	0	0	0	-5	-5M	$\frac{5-10M}{3}$	20	

Optimal solution

تحقق الحل الأمثل وأن R_1 و R_2 أصبحت non-basic:

$X_1 = 6$ $X_2 = 8$ $Z = 20$

مثال (15):

Find the optimal solution using too phase method for the following linear programming model

Max $Z = 2X_1 + 3X_2 - 5X_3$

subject to:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 30$$

$$2X_1 - 5X_2 + X_3 \geq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Solution:

أولاً: نحول صيغة النموذج أعلاه إلى الصيغة القياسية

Max $Z = 2X_1 + 3X_2 - 5X_3$

subject to:

$$X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 7$$

$$2X_1 - 5X_2 + X_3 - S_2 + R_2 = 10$$

$$X_1, X_2, X3, R_1, S_2, R_2 \geq 0$$

Phase I:

Min $W = R_1 + R_2$

subject to:

$$X_1 + X_2 + X_3 + R_1 = 7$$

$$2X_1 - 5X_2 + X_3 - S_2 + R_2 = 10$$

$$X_1, X_2, R_1, S_2, R_2 \geq 0$$

Basic	X_1	X_2	X_3	S_2	R_1	R_2	R.H.S
R_1	1	1	1	0	1	0	7
R_2	2	-5	1	-1	0	1	10
W	3	-4	2	-1	0	0	17
R_1	0	7/2	1/2	1/2	1	-1/2	2
X_1	1	-5/2	1/2	-1/2	0	1/2	5
W	0	7/2	1/2	1/2	0	-3/2	2
X_2	0	1	1/7	1/7	2/7	-1/7	4/7
X_1	1	0	6/7	-1/7	5/7	1/7	45/7
W	0	0	0	0	-1	-1	0

End of phase I

لأن قيمة W أصبحت صفر وأن كل من R2, R1 متغيرات غير أساسية، الآن نـدخل في المرحلـة الثانية ابتداء من الجدول الأخير ما عدا دالة الهدف فنرجع دالة الهدف الأصلية مع مراعاة نوع الدالـة مع حذف عمود R2, R1 من الجدول:

Phase II:

Basic	X_1	X_2	X_3	S_2	R.H.S	
X_2	0	1	1/7	1/7	4/7	
X_1	1	0	6/7	-1/7	45/7	
Max Z	-2	-3	+5	0	0	
$3X_2$	0	3	3/7	3/7	12/7	
$2X_1$	2	0	12/7	-2/7	90/7	بالجمع
New max Z	0	0	50/7	1/7	102/7	

بما أن جميع معاملات دالة الهدف صـفرية وموجبـة هـذا يعنـي تحقـق الحـل الأمثـل وإنهـاء المرحلة الثانية End of phase II

$$X_1 = \frac{45}{7} \quad , \quad X_2 = \frac{4}{7} \quad , \quad Z = \frac{102}{7}$$

2-5 الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

Special Cases in Linear Programming

إن مشكلات البرمجة الخطية عامة ويمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، لكن هناك بعض الحالات الخاصة يجب مراعاتها ومن هذه الحالات:

1- الإحلال Degeneracy

2- تعدد الحلول المثلى Alternative optima

3- الحلول الغير محدودة Unbounded Solution

4- عدم وجود حل ملائم No existing or infeasible Solution

1- الإحلال Degeneracy:

هذه الحالة نادرة الحدوث في التطبيقات العملية وتواجهنا عندما نحل أحد النماذج بالطريقة المبسطة Simplex ونصل إلى أحد دورات الحل Alteration فنجد أن قيمة أحد المتغيرات variable أو أكثر تساوي إلى الصفر (في عمود Basic variable) وعندما تواجهنا مثل هذه الحالة فإن هذا يعني (لا يوجد ضمان من أن قيمة دالة الهدف Objective Function سوف تتحسن فيما لو استمرينا بالحل وإنما ندخل في دوامة من الدورات Iteration دون أن تؤثر على قيمة دالة الهدف).

في بعض الأحيان قد يكون هذا الإحلال Degeneracy وقتياً (مرحلة معينة) أي لا يستمر في الدورات اللاحقة، ولا يمكن معرفة فيما إذا كان هذا الانحلال وقتي أم أنه دائم إلا بالاستمرار بالحل إلى أن يستوفي تطبيق شروط الأمثلية. وهذه الحالة يمكن بيانها في حالة الرسم Graphical Solution وكذلك يمكن بيانها في حالة Simplex وفيما يلي المثال التالي لتوضيح الحالة بيانياً وحسابياً.

مثال (16) (Degenerate optimal solution):

Max $Z = 3X_1 + 9X_2$

subject to:

$X_1 + 4X_2 \leq 8$

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

بيان الحالة حسابياً باستخدام أسلوب simplex وحسب الخطوات السابقة:

Max $Z = 3X_1 + 9X_2$

subject to:

$X_1 + 4X_2 + S_1 = 8$

$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$

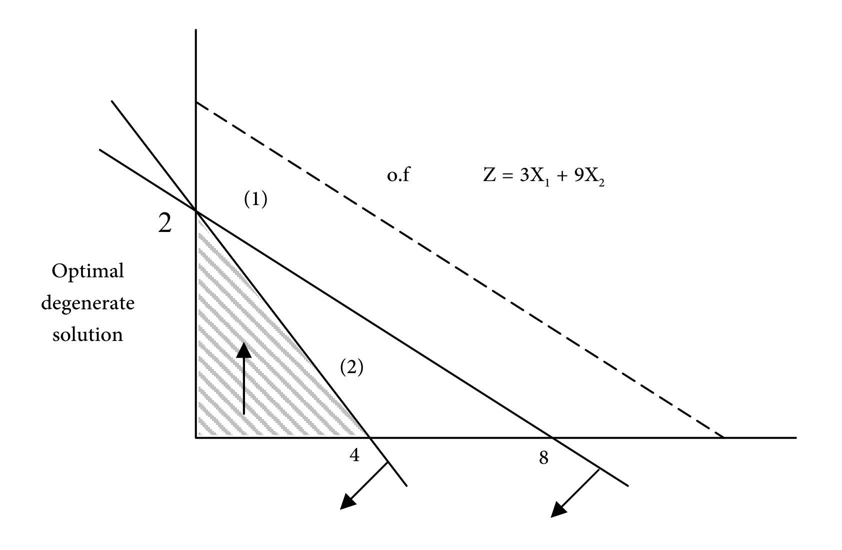
$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
	S_1	1	4	1	0	8
Iteration 0	S_2	1	2	0	1	4
	Z	-3	-9	0	0	0
Iteration I	X_2	1/4	1	1/4	0	2
يمكن ملاحظة قيمة صفر في عمود	S_2	1/2	0	-1/2	1	0
الحل	Z	-3/4	0	9/4	0	18
Iteration II	X_2	0	1	1/2	-1/2	2
نلاحظ بقاء الإحلال في هذه المرحلة	X_1	1	0	-1	2	0
أيضاً	Z	0	0	3/2	3/2	18

Optimal solution

من الجـدول أعـلاه نلاحـظ أن كـل مـن S1 ,S2 هـما Slack variables للقيـود وفي الـدورة الأولى Iteration 0 تم اختيار المتغير الـداخل Entering variable (X_2) أمـا المتغـير الخـارج Leaving variable (S1) ويمكن أن يكون S2 لأن النسبة كانت متساوية وفي مثل هذه الحالة يكون الاختيـار عشـوائي لتحديـد المتغير الخارج ويمكن ملاحظـة قيمـة الصـفر في عمـود الحـل R-H-S أمـا في الـدورة الثانيـة Iteration I

المتغير الداخل كان X1 أما المتغير الخارج فهو S2 لأن Ratio كان يساوي إلى الصـفر والمتمثلـة بأصـغر قيمة ممكنة، ونلاحظ استمرار بقاء القيمة الصفرية في عمود الحل R-H-S وأن قيمـة دالـة الهـدف لم تتغير Z = 18 وعلماً بـأن التوصـل إلى الحـل الأمثـل optimal solution لعـدم وجـود قـيم سـالبة في معاملات دالة الهدف في الدورة الثانية، هذا يعني أن دخول المتغير X1 كمتغـير أسـاسي لم يغـير قيمـة دالة الهدف وهذا يعني أن كل من X2, X1 لهما نفس القيم وهذا يكون واضح في الرسم البياني التـالي والممثلة للمشكلة أعلاه.



شكل (14) الإحلال degeneracy

2- تعدد الحلول المثلى Alternative optima:

تحدث هذه الحالة عندما تكون معادلة دالة الهـدف objective function موازيـة parallel لأحد قيود المسألة Constraint الذي يسهم في تحديد منطقة الحل optimal solution ويحصل مـن ذلك أكثر من قيمة في منطقة الحل لها نفس الارتفاع مقارنـة بمعادلـة دالـة الهـدف، أي سـوف يكـون هناك أكثر من حل أمثل يسمى Alternative optima جميعها تعطي نفس قيمـة دالـة الهـدف لكـن قيمة المتغيرات تختلف في كل حل من هذه الحلول.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (17): Infinity of solution

Max $Z = 2X_1 + 4X_2$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$

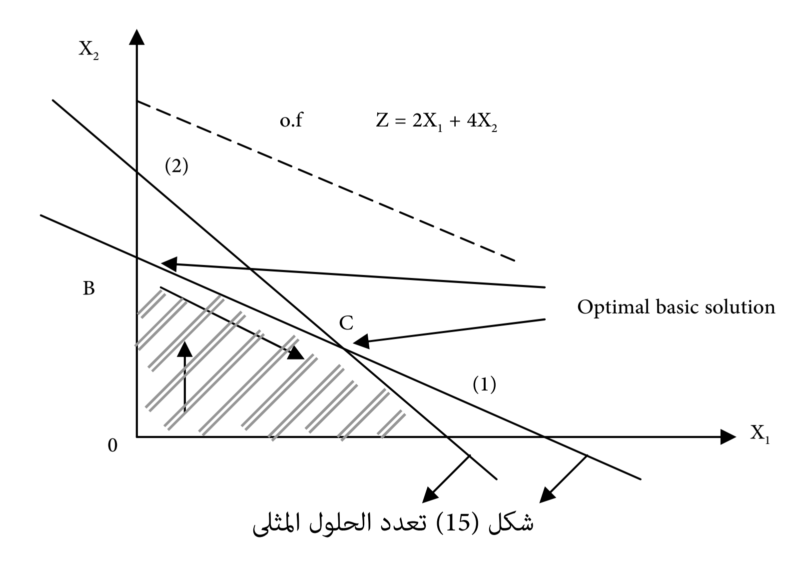
$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Solution:

1- الحل بطريقة الرسم:

الحل بطريقة الرسم يوضح لنا كيفية تعدد الحلول المثلى لأن أحد القيود سوف تكـون موازيـة parallel إلى دالة الهـدف O.F فـنلاحظ هنـا أن القيـد $X_1 + 2X_2 \leq 5$ يـوازي دالـة الهـدف، وأن كـلا النقطتين تقع على الخط (BC) هما قيمتان لمنطقـة الحـل (Any point on the line segment BC represent an alternative optimum) فإن جميع النقاط التي تقع على الخط المستقيم الذي يربط القيمتين BC ستعطي حلول مثلى للمسألة وبقيم مختلفة للمتغيرات ولكن بنفس القيمة لدالة الهدف (Z = 10) والشكل (15) يوضح ذلك.



شكل (15) تعدد الحلول المثلى

2- الحل بطريقة Simplex

بعد تحويل القيود إلى الصيغة القياسية بإضافة Slack variable (S1 للقيـد الأول و S2 للقيـد الثاني) وتوضيحها في الجدول أدناه (Iteration of the Model)

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Iteration 0	S_1	1	2	1	0	5
	S_2	1	1	0	1	4
	Z	-2	-4	0	0	0
Iteration I	X_2	1/2	1	1/2	0	5/2
	S_2	1/2	0	-1/2	1	3/2
	Z	0	0	2	0	10
Iteration II	X_2	0	1	1	-1	1
	X_1	1	0	-1	2	3
	Z	0	0	2	0	10

الدورة رقم واحد Iteration I تعطي حل عندما X1 = 0 فإن X2 = 5/2 وهنـاك قيمـة إلى Z = 10 وهذه النقطة واضحة في شكل (15) والمتمثلة بالنقطة B، كيف تعلم أن هذه النقطة تعدديـة الحـل. لـو نظرنـا إلى المتغـيرات الغـير أساسـية non basic variables في معادلـة Z – equation في الـدورة (1) معامل المتغير X1 الغير أساسي مساوياً إلى الصفر هذا يؤشر أنه يمكن لــ X1 أن تـدخل ضـمن المتغـيرات الأساسية وبدون التأثير على الحل الأمثل أي قيمة Z لكن تحدث تغيير في قيم المتغيرات كما هـي واضـحة في الدورة الثانية Iteration II فإن X1 متغير داخل ويكون S2 هو المتغير الخارج وهـذا واضـح في الـدور الثانية حيث: (X1 = 3, X2 = 1, Z = 10)، وظهور الصفر مرة ثانية لدى معادلـة دالـة الهـدف Z تحـت عمود المتغير الأساسي S2. فإذا كانت مثلاً X1 تمثل منتوج معين و X2 منتوج من نـوع آخـر وكانـت دالـة الهدف Z تعبر عن أقصى ربح للمشروع فيكون أمام إدارة المشروع عدة خيارات في اتخاذ القرار حـول مـا ينتج من كلا النوعين وبنسب مختلفة حيث جميع هذه الخيارات تـؤدي إلى تحقيـق نفـس عائـد الـربح، وأن جميـع النقـاط الواقعـة عـلى الخـط المسـتقيم BC تعطـي حلـول مـثلى أخـرى لا نهايـة لهـا ولكـن

بنسب مختلفة لكلا المتغيرين X2, X1 وتؤدي جميعها إلى عائد ثابت لدالة الهدف Z وكما هو موضح في الرسم الشكل (15).

3- الحلول الغير محدودة Unbounded solution

المقصود بالحل الغير مقيد Unbounded solution عندما تكون منطقة الحل الملائم Feasible solution غير محدد لذا فإن قيمة دالة الهدف يمكن أن تزداد إلى ما لا نهاية ولا يمكن الوصول إلى الحل الأمثل optimal solution وكما هو موضح في المثال التالي:

مثال (18) (Unbounded objective value):

$$\text{Max} \quad Z = 2X_1 + X_2$$

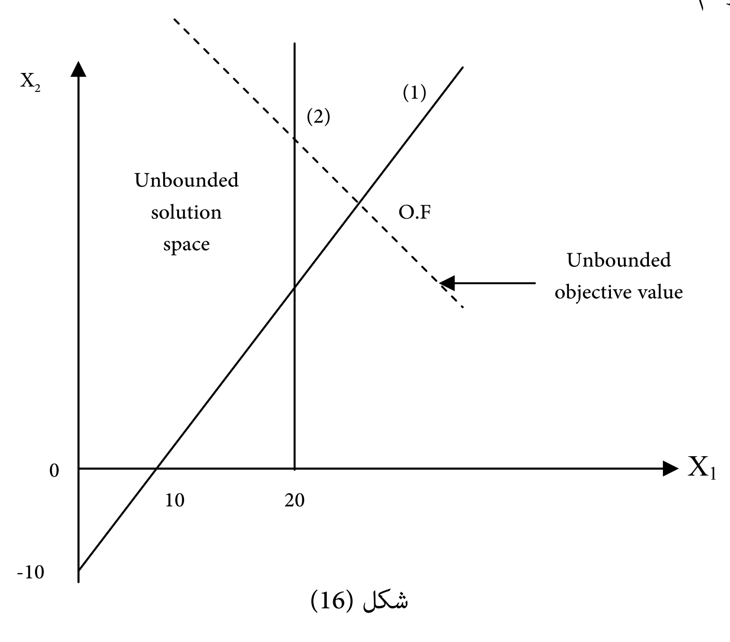
subject to:

$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$2X_1 \qquad \leq 40$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

1- حالة الرسم:



شكل (16)

2- الحل بالطريقة المبسطة Simplex:

$$\text{Max} \quad Z - 2X_1 - 1X_2$$

subject to:

$$X_1 - X_2 + S_1 = 10$$

$$2X_1 + S_2 = 40$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , R_1 \geq 0$$

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Starting	S_1	1	-1	1	0	10
Iteration	S_2	2	0	0	1	40
	Z	-2	-1	0	0	0

من الحل الأولي نلاحظ أن كل من X_1 و X_2 هي متغيرات داخلة لتحسين الحل لأن معاملاتها في دالة الهدف سالبة.

وبما أن X_1 تقابل أكبر معامل سالب فبالتأكيد سيكون هو التغير الداخل لكن كل المعاملات تحت عمود X_2 هي سالبة وصفرية هذا يعني أن X_2 تزداد بشكل غير محدود وبدون التأثير على القيود الأخرى كما تلاحظه في الرسم البياني فإن أي زيادة بمقدار وحدة واحدة تؤثر على دالة الهدف بنفس الزيادة هذا يعني أن أي زيادة في المالانهاية من X_2 تؤدي إلى زيادة غير محددة بالنسبة إلى Z لذا فأن المسألة ليس لها حل محدود ومنها نستنتج أن هناك متغير داخل لكن لا وجود للمتغير الخارج حتى وإن حسنا الحل بالنسبة إلى المتغير الأول X1 فنحصل على نفس حصيلة الجدول الأول (حاول أن تحل السؤال وتصل إلى عمود لا يحوي على متغير خارج)

في بعض الأحيان قد تكون منطقة الحل غير محدودة ولكن لها حل أمثل أي يمكن بلوغ الحل الأمثل optimal solution عندما يكون بمقدور دالة الهدف ملامسة أقصى نقطة في منطقة الحل Feasible Region كما في النموذج التالي:

مثال (19):

(Unbounded solution space but finite optimum objective value)

Max $Z = 8X_1 - 2X_2$

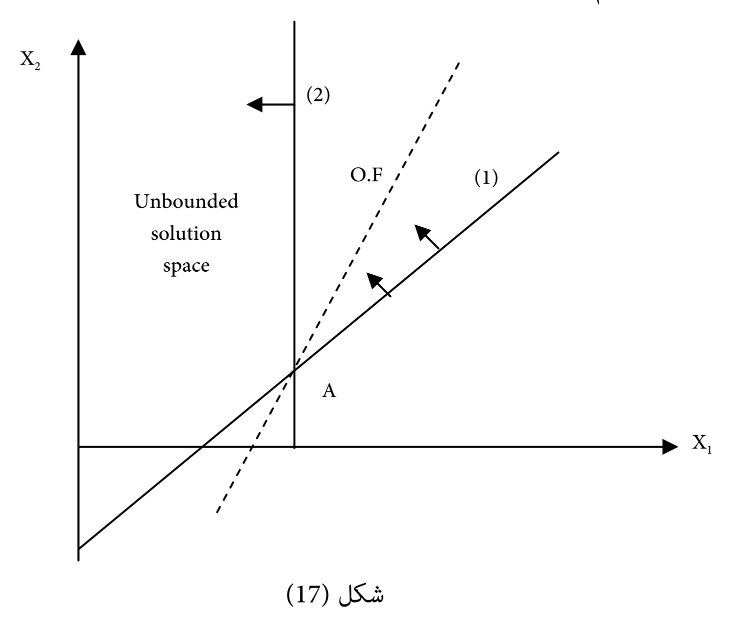
subject to:

$$3X_1 - 2X_2 \leq 6$$

$$2X_1 \leq 10$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

1- الحل بطريقة الرسم:



شكل (17)

من الرسم البياني يمكن ملاحظة أن مستقيم دالة الهدف قد لامست قمة منطقة الحل في النقطة A التي هي إحدى النقاط المتطرفة لمنطقة الحل (F.R) الغير محدودة ولكن بسبب طبيعة معادلة دالة الهدف يمكن تحديد الحل الأمثل لهذا النموذج الرياضي.

2- الحل بطريقة Simplex:

بعد تحويل القيود إلى الصيغة القياسية وذلك بإضافة S_1 لقيد الأول S_2 للقيد الثاني فإن الجدول الأساسي الأولي لهذه القيود تكون كما يلي:

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
Iteration 0	S_1	3	-2	1	0	6
	S_2	2	0	0	1	10
	Z	-8	+2	0	0	0
Iteration I	X_1	1	-2/3	1/3	0	2
	S_2	0	4/3	-2/3	1	6
	Z	0	-10/3	8/3	0	16
	X_1	1	0	0	1/2	5
	X_2	0	1	-1/2	3/4	9/2
	Z	0	0	1	9/2	31

Optimal solution

وأن: $X_1 = 5 \quad , \quad X_2 = \frac{9}{2} \quad , \quad Z = 31$

هنا تحقق الحـل الأمثـل وعـلى الـرغم أن عمـود معـاملات X_2 في الجـدول الأول Iteration 0 يحوي قيم سالبة وصفرية.

4- حالة عدم وجود حل ملائم Infeasible solution space

تحدث هذه الحالة في المسائل التـي قيودهـا لا تحـدد منطقـة حـل موحـدة أي عـدم تشـارك القيود في مجال الحل وهذا بسبب في أن يكون مجال الحل feasible Region فارغ ولا يمكن الوصـول إلى حل ملائم لمثل هذه النماذج الرياضية Linear programming model

مثال (20) (Infeasible solution space):

Max $Z = 3X_1 + 2X_2$

subject to:

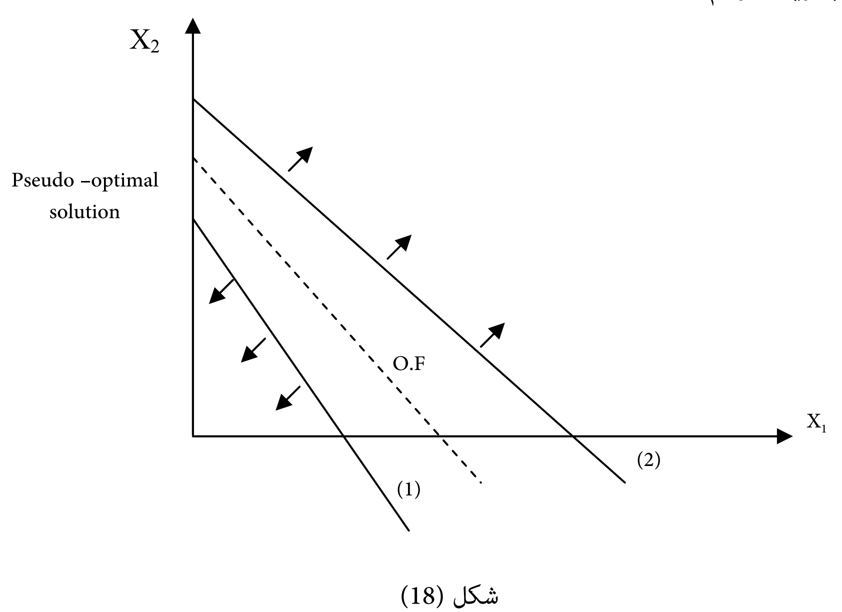
$2X_1 + X_2 \leq 2$

$3X_1 + 4X_2 \leq 12$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

1- الحل بطريقة الرسم:



شكل (18)

نلاحظ في الشكل أن الخط المستقيم الذي يعبر عن معادلة دالة الهدف لا يمكن أن يوفق منطقتي الحل الملائم. وهذا ما يطلق عليه Pseudo-optimal solution كما في الشكل (18).

2- الحل بطريقة Simplex

نحول القيود إلى الصيغة القياسية وذلك بإضافة S1 للقيد الأول أما القيد الثاني (S2-) لذا نحتاج إلى متغير اصطناعي وهو R2 ونستخدم أسلوب M– تكتيك.

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	R.H.S
Iteration 0	S_1	2	1	1	0	0	2
	R_2	3	4	0	-1	1	12
	Z	-3-3M	-2-4M	0	M	0	-12M
Iteration I	X_2	2	1	1	0	0	2
	R_2	-5	0	-1	-4	1	4
	Z	1+5M	0	M	2+4M	0	4-4M

Optimal solution

يعتبر Iteration I حل أمثل بموجب شروط الأمثلية لأنه لم تعد هناك قيم سالبة في دالة الهدف، ولكن هذا الحل يحتوي على المتغير الاصطناعي R2 بقيمة موجبة تساوي (4)

وهذا يعني أنه ليس للمسألة حل ملائم no optimal solution لوجود المتغيرات الاصطناعية في عمود المتغيرات الأساسية.

أسئلة الفصل الثاني

1- Ahmed farm uses at least 800 kg of special feed daily. The special feed is a mixture of corn and soybean meal with the following compositions:

Feed stuff	Kg		Cost (J.D) kg
	Protein	Fiber	
Corn	0.09	0.02	0.30
Soy bean meal	0.60	0.06	0.90

The dietary requirement of the special feed are at last 30% protein and at most 5% fiber. Ahmed farms wishes to determine the daily mimmum cost feed Mix.

2- Oil company is building a refinery to produce four products: diesel, gasoline, labri cants, and jet fuel. The demands (in bb1/day) forthese products are 14.000, 30.000, 10.000 and 8000 respectively. Iran and Dubai are under contract to shipe crude to Oil Co. Because of the production quotas specified by OPEC (Organization of petroleum Exporting Countries) the new refinery can receive at least 40% of its crude from Iran and the remaining amount from Dubai. Oil Co. predicts that these demand and crude oil quatas will remain steady over the next 10 years.

The different specifications of the two crude oils lead to defferent product mixes: one barrel of Iran crude lield. 2 barrel of diesel, 25 barrel of gasoline, 1 barrel of lubricant and 15 barrel of jet fuel. The corresponding Yields from Dubai crude are 1, 6 , 15 and 1 respectively. Oil company to determine the minimum capacity of the refinery in barral perday.

3- Two products require three sequential processes. The time available for each process is 10 hourse a day. The following table sumarizes the data of the problem:

	Minuters per unit			
Product	Process 1	Process 2	Process 3	Unit profit
1	10	6	8	$2
2	5	20	10	$3

Formulate the problem us a linear programing model to detremine the optimum product.

4- A manafactures produces three models:

I. II and III of a certain product. He uses two types of raw material A and B of which 4000 and 6000 units are available respectively. The raw material requirement per unit of the three models are given below:

	Requirements per unit of given model		
Row material	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

The labor time for each unit of model I is twice that of model II three times of model III. The entire labor force of the factory can produce the equivelent of 1500 unit of model I. Amarket survey indicates that the mimimum demand for the three models is 200 , 200 and 150 units respectively. However, the ratio of number of units produced must be equal to 3 : 2 : 5 Assume that the profit per unit of models I , II and III is \$30, \$20 and \$50. Formulate the problem as linear programming model to determine the number of units of each product that will maximize profit.

5- Consider the following problem:

Maximize $Z = 2X_1 - 4X_2 + 5X_3 - 6X_4$

Subject to:

$$X_1 + 4X_2 - 2X_3 + 8X_4 \leq 2$$

$$-X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 \leq 1$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

Determine the feasible extreme points.

6- A company owns two mines. In one day mine A can produce 1 ton of high grade ORE, 3 tons of medium grade ORE and 5 tons of low grade ORE mine B can produce 2 tons of each of three grades of ORE. For a specific project, the company needs 80 tons of high grade ORE, 160 tons of medium grade ORE and 200 tons of low grade ORE. How many days should each mine be operated to meet the requirements at minimum cost if:

1- The daily production cost is \$50 in mine A and \$30 in mine B?

2- The daily production cost is $50 in each mine?

7- Consider the following L.P. model

Maximize $Z = 4X_1 + 6X_2$

Subject to:

$$X1 + X_2 \leq 10$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 20$$
$$4X_1 + X_2 \geq -15$$
$$2X_1 + 2X_2 = 8$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Determine the standard form and state its feasible region.

8- Write the standard form of the following linear programming model:

Maximize $Z = 2X_1 - 5X_2$

Subject to:

$$-2X_1 + 4X_2 \leq 5$$
$$X_1 + 2X_2 = 20$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

9- Find the optimal solution graphically:

1- Maximize $Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 5$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

2- Minimize $Z = X_1 - 2X_2$

Subject to:

$$4X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$-X_1 + X_2 \leq 0$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

3- Maximize $Z = 5X_1 + 2X_2$

Subject to:

$$X_1 + X_2 \leq 10$$
$$X_1 = 5$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

4- Maximize $Z = 6X_1 - 2X_2$

Subject to:

$$X_1 + X_2 \leq 6$$
$$X_1 \geq 3$$
$$X_2 \geq 3$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 3$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

1- Maximize $Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to:

$$2X_1 + X_2 \leq 2$$
$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

10- Write the constraints associated with solution space shown in figure (1) and identify all redundant constraints:

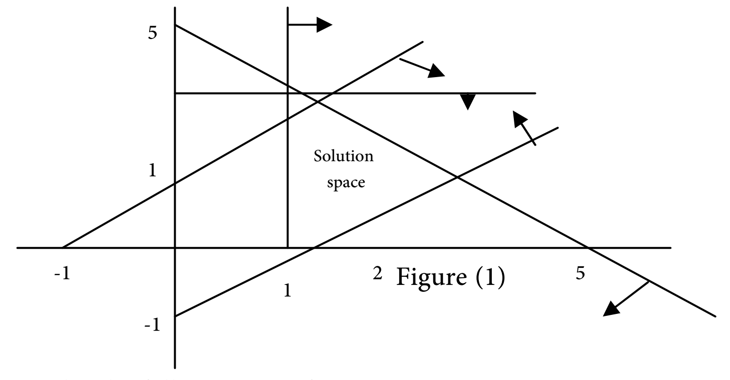


Figure (1)

11- Consider the following set of constraints:

$$X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 7X_4 \leq 46$$
$$3X_1 - X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 8$$
$$2X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 \leq 10$$

solve the problem by the simplex method assuming that the objective function is given as follows:

1- Maximize $Z = 2X_1 + X_2 - 3X_3 + 5X_4$

2- Maximize $Z = 3X_1 - X_2 + 3X_3 + 4X_4$

3- Minimize $Z = 3X_1 + 6X_2 - 2X_3 + 4X_4$

12- Solve the following linear programming using two phase method:

Minimize $Z = 4X_1 - 8X_2 + 3X_3$

Subject to:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 7$$

$$2X_1 - 5X_2 + X_3 \geq 10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

13- Consider the problem:

Minimize $Z = X_1 + 5X_2 + 3X_3$

Subject to:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 3$$

$$2X_1 - X_2 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Let R be an artificial variable in the second constraint equation. Solve the problem by using X_3 and R for starting basic solution.

14- Solve the following problem by using X_3 and X_4 as a starting basic feasible solution:

Minimize $Z = 3X_1 + 2X_2 + 3X_3$

Subject to:

$$X_1 + 4X_2 + X_3 \geq 7$$

$$2X_1 + X_2 + X_4 \geq 10$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

15- Show that the optimal solution is degenerate and that there exist alternative solution that are all non basic:

Maximize $Z = 3X_1 + X_2$

Subject to:

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$X_1 + X_2 - X_3 \leq 2$$

$$7X_1 + 3X_2 - 5X_3 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

16- Solve the following linear programming mode:

Maximiz $Z = 3X_1 + 2X_2$ (profit)

Subject to:

$4X_1 + 3X_2 \leq 12$ (resource 1)

$4X_1 + X_2 \leq 8$ (resource 2)

$4X_1 - X_2 \leq 8$ (resource 3)

$X_1 , X_2 \geq 0$

17- Use Big. M method to solve:

1- Minimize $Z = 3X_1 + 8X_2 + X_3$

Subject to:

$6X_1 + 2X_2 + 6X_3 \leq 6$

$6X_1 + 4X_2 = 12$

$2X_1 - 2X_2 \leq 2$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

2- Maximize $Z = 3X_1 + X_2 - X_3$

Subject to:

$X_1 + X_2 + X_3 = 10$

$2X_1 - X_2 \geq 2$

$X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 6$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

الفصل الثالث

البرمجة الثنائية وتحليل الحساسية

Duality and Sensitivity Analysis

الفصل الثالث

البرمجة الثنائية وتحليل الحساسية

Duality and Sensitivity Analysis

3-1 المقدمة Introduction:

A Liner Programming model is a snapshot of a real situation in which the model parameters (Objective and Constraint coefficients) assume static values. To enhance the applicability of Lp in practice, we need to add a dynamic that investigates the impact of making changes in the model parameters (objective and constraint coefficient) on the optimal solution. The procedure is referred as Sensitivity analysis because it studies the sensitivity of the optimal solution to changes made in the model. It provides efficient computational techniques to study the dynamic behavior of the optimal solution resulting from making changes in the parameters of the model.

In this chapter, we use duality theory to provide an algebraic treatment of this important practical topic.

في هذا الفصل سنناقش الأسلوب الرياضي لتحليل الحساسية Sensitivity Analysis ولكن يجب التطرق إلى النظرية الثنائية أولاً Dual Theory التي يعتمد عليها تحليل الحساسية Sensitivity Analysis وإن لكل مسألة برمجة خطية L.P هناك مسألة ثنائية Dual أخرى مرافقة لها، ولكن هناك علاقة ما بين المسألتين وخصائص تربطهما بحيث أن الحل الأمثل Optimum لإحدى هاتين المسألتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للمسألة الثنائية.

ويطلق على صياغة مشكلة ما بأسلوب البرمجة الخطية L.P وعلى حلها اصطلاح النموذج الأولي Primal Model إلا أنه بالإمكان إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب أخر ضمن نطاق البرمجة الخطية والتوصل إلى حل المشكلة ذات العلاقة وهذه الصبغة الرياضية الجديدة للمشكلة وحلها يطلق عليها النموذج المقابل Dual Model.

وكما للبرمجة الخطية فوائد في استخدامها فإن للنموذج المقابل أيضاً فوائد وميزات وأن من أبرز الفوائد الناجمة عن صياغة نموذج مقابل ابتداء من النموذج الأولي يتمكن الباحث من الوقوف على تفصيلات البرمجة الخطية وتحليلها علمياً، بالإضافة إلى ذلك فإن النموذج المقابل له الميزات التالية:

1- يساعد النموذج المقابل الباحث على اختزال خطوات الحل في بعض الأحيان والتوصل إلى نتائج للمشكلة بصورة أسرع.

2- إذا كان لأحد متغيرات النموذج الأولي Primal Model قيمة سالبة Negative فإن حل مثل هذا النموذج غير ممكن Infeasible. بينما في حالة النموذج المقابل Dual يمكن إيجاد حل للمشكلة عند وجود متغير ذي قيمة سالبة Negative Variable.

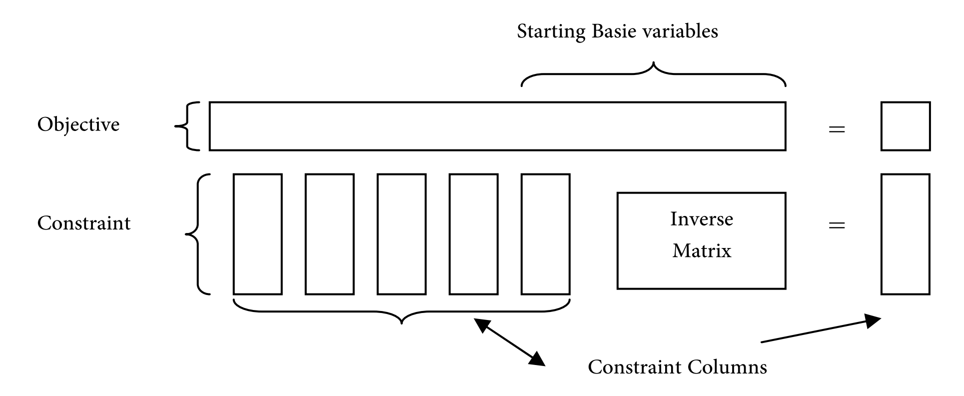
3- بالإمكان إضافة قيود جديدة New Constrictions للمشكلة وإيجاد حل أمثل لها وفقاً للقيود المضافة، ومنها نستنتج أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً، كما أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً أولياً.

3-2 النظرية الثنائية Dual Theory:

The dual is an auxiliary linear programming problem defined directly and systematically from the original or primal linear programming model. It should be noted that if there are n structural variable and m slack variables in the primal problem, there will be m structural variables and n slack variables in its dual in this section we introduce a single definition of the dual that automatically accounts for all forms of the primal. We explain the computation using the following:

$$\begin{pmatrix} \text{Column in} \\ \text{iteration} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Inverse in} \\ \text{iteration} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Original} \\ \text{Model column} \end{pmatrix}$$

To illustrate the uses of this formula consider the primal shown:

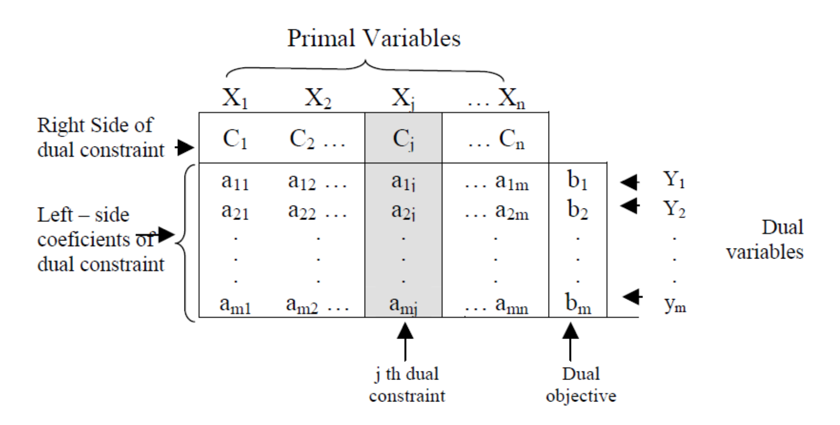


فإن المسألة الثنائية تعني عبارة عن صياغة نموذج برمجة خطية ثانوية أو ثنائية من نموذج برمجة خطية أولية (والعكس) إن للنموذج الثنائي استخدامات كثيرة في مختلف المجالات الإدارية والاقتصادية وذلك على مستوى المنشأة بشكل خاص والاقتصاد بشكل عام ويهدف هذا النموذج إلى تقديم تحليلات ومؤشرات مختلفة لم يكن بالإمكان الحصول عليها باستخدام النموذج الأصلي Original أو أولي Primal.

إن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً كما أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً أولياً، إن من أهم الصفات المشتركة للنموذج الأولي والنموذج المقابل يمكن توضيحها كما يلي:

Primal Model	Dual Model
1- Objective Function Maximum (all constraint are less than and equal ≤) Minimum (all constraint are greater than and equal ≥)	O. F Minimum (all constraint are gretare than and equal ≥) Maximum (all constraint are less than and equal ≤)
2- For every primal constraint	There is a dual variable
3- For every primal variable	There is a dual constraint
4- The constraint coefficient of primal variable (Column)	Form the left – side coefficients of the corresponding dual constraint (ROW)
5- The objective coefficient of primal variable	The right hand side of the dual constraint

والجدول التالي يبين الخطوات السابقة:



جدول رقم (1)

ويمكن تلخيص تلك الخطوات إلى:

1- تعبر عن كل قيد في مسألة البرمجة الخطية Primal بمتغير واحد (Yi) Variable في المسألة الثنائية Dual.

2- الطرف اليمن R. H. S في المسألة الأولية Primal تمثل معاملات (للمتغيرات الجديدة التي تم افتراضها (Yi)) دالة الهدف في المسائل الثنائية Dual

3- تعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في Primal (Maximum) تعكس إلى (Minimum) في المسألة الثنائية والعكس بالعكس.

4- في النموذج الثاني عندما تعكس صيغة دالة الهدف وتجعلها بصيغة Minimum فإن القيود تكون على نوع أكبر ويساوي (≥) أما إذا كانت Maxim فإن القيود أصغر وتساوي ≤

5- إذا كانت علامات القيد مساواة (=) في البرمجة الأولية Primal قبل تحويلها إلى الصيغة الثنائية Standard Form فإن المتغير الذي يعبر

عن هذا القيد في المسألة الثنائية يكون غير مقيد بالإشارة Unrestricted in singe.

وفيما يلي مجموعة من الأمثلة توضح النقاط أعلاه:

مثال (1):

Write the duals of the following problems:

Max $Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10$$

$$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 8$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

Solution:

نلاحظ هنا أن القيد الثاني مساواة هذا يعني أن المتغير الذي يقابل هذا القيد يكون غير مقيـد بالإشارة Unrestricted

Standard Primal:

Max $Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3 + 0S_1$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 + S_1 = 10 \quad \leftarrow y_1$$

$$2X_1 - X_2 + 3X_3 + 0S_2 = 8 \quad \leftarrow y_2$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 \geq 0$$

إن S1 تمثل Slack Variable القيد الأولي أما القيد الثاني، معاملة يساوي إلى الصفر، لأن القيد على صيغة مساواة:

Dual:

Min $W = 10Y_1 + 8Y_2$

subject to:

$X_1 :$ $Y_1 + 2Y_2 \geq 5$

$X_2 :$ $2Y_1 - Y_2 \geq 12$

$X_3 :$ $Y_1 + 3Y_2 \geq 4$

$S_1 : Y_1 \geq 0$ $\quad$ Y_2 unrestricted

مثال (2):

Min $Z = 5X_1 - 2X_2$

subject to:

$-X_1 + X_2 \geq -3$

$2X_1 + 3X_2 \leq 5$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solution:

قبل التحويل إلى صيغة Dual فيجب جعل القيد الثاني بصيغة $\geq$ أكبر ويساوي لذا نضرب هذا القيد × 1-

Min $Z = 5X_1 - 2X_2$

subject to:

$-X_1 + X_2 \geq -3 \quad \leftarrow Y_1$

$-2X_1 - 3X_2 \geq -5 \quad \leftarrow Y_2$

$X_1 , X_2 \geq 0$

ويمكن كتابة Dual من غير تحويلها إلى الصيغة القياسية (Standard):

Dual:

Min $W = -3Y_1 - 5Y_2$

subject to:

$X_1 : \quad -Y_1 - 2Y_2 \leq 5$

$X_2 : \quad Y_1 - 3Y_2 \leq -2$

$Y_1 , Y_2 \geq 0$

مثال (3):

Write the dual for the following Primal model

Max $Z = 5X_1 + 6X_2$

subject to:

$X_1 + 2X_2 = 5$

$-X_1 + 5X_2 \geq 3$

$4X_1 + 7X_2 \leq 8$

X_1 Unrestricted

$X_2 \geq 0$

Solution:

نلاحظ هنا X_1 متغير غير مقيد بالإشارة هذا يعني أن القيد الذي يقابل هذا المتغير في Dual يكون على هيئة المساواة ولن يأخذ شرط دالة الهدف.

أما القيد الأول في primal على هيئة مساواة هذا يعني المتغير الذي يقابل هذا القيد في Dual يكون غير مقيد بالإشارة.

Dual:

Min $W = 5Y_1 + 3Y_2 + 8Y_3$

s.t.:

$Y_1 - Y_2 + 4Y_3 = 5$

$2Y1 + 5Y_2 + 7Y_3 \geq 6$

Y_1 Unrestricted

$Y_2 \leq 0$

$Y_3 \geq 0$

نلاحظ هنا أن القيد الأول مساواة لأن X1 غير مقيدة بالإشارة أما بالنسبة إلى Y2 تكون سالبة لأن القيد الثاني في primal أكبر ويساوي (≥) علما بأن دالة الهدف Maximum فإذا حولت إلى الصيغة القياسية إلى:

$-X_1 + 5X_2 - S_2 = 3$

فعند أخذ Dual لها فإن المتغير الذي يقابل S_2 هو Y_2 فإن:

$-1 X (-Y_2) \geq O$

إذن $Y_2 \leq O$

3-3 الحل الأمثل للمسألة الثنائية Optimal Dual Solution:

The primal and dual solution are so closely related that the optimal solution of the primal problem directly yields (with little additional computations) the optimal solution of the dual.

كما ذكرنا سابقاً هناك علاقة بين النموذج الرياضي الأولي Primal Model والنموذج الثنائي Dual Model ومن أهم هذه العلاقات هي علاقة دالة الهدف objective function فإن الحل الأمثل للمسألة Primal يمكن أن تمثل الحل الأمثل إلى Dual مباشرةً مع بعض الحسابات الإضافية فإن الحل الأمثل إلى النموذج الثنائي Optimal Solution of the dual يمكن إيجادها باستخدام إحدى الطريقتين التاليين:

الطريقة الأولى Method I:

(Optimal value of dual variable) = (Row vector of original objective coefficients of optimal primal basic variables) × (Optimal primal inverse)

(القيمة المثلى للمتغيرات الثنائية) = (معاملات دالة الهدف للدالة الأصلية للحل الأمثل الأولي) × (معكوس الحل الأمثل الأولي)

والمثال التالي يوضح هذه الطريقة

مثال (4):

Consider the following L.P:

Max $Z = 5X_1 + 12X_2 + 4Y_3$

subject to: $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10$

$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 8$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Find the optimal solution of the dual from the primal optimal solution?

Solution:

لإيجاد الحل الأمثل إلى البرمجة الثنائية Dual يجب حل المسالة أولاً باستخدام أسلوب Simplex وذلك بإضافة slack للقيد الأول ومتغير اصطناعي للقيد الثاني، وباستخدام أسلوب M- Technique أو أسلوب المرحلتين يمكن التوصل للحل الأمثل.

فيما يلي الجدول النهائي للحل الأمثل للنموذج أعلاه:

Optimal table of the Primal

Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	R_2	R.H.S
X_2	0	1	-1/5	2/5	-1/5	12/5
X_1	1	0	7/5	1/5	2/5	26/5
Z	0	0	3/5	29/5	-2/5+M	274/5

جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي

ويمكن تحويل النموذج الأولى إلى الصيغة الثنائية كما يلي:

Primal	Dual
$\text{Max } Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3 - MR$	$\text{Min } W = 10Y_1 + 8Y_2$
subject to:	subject to:
$X_1 + 2X_2 + X_3 + S_1 = 10$	$Y_1 + 2Y_2 \geq 5$
$2X_1 - X_2 + 3X_3 + R_2 = 8$	$2Y_1 - Y_2 \geq 12$
$X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , R_2 \geq 0$	$Y_1 + 3Y_2 \geq 4$
	$Y_1 \geq 0$
	Y_2 unrestricted
	Or
	$Y_2 \geq -M$

وبعد كتابة صيغة Dual في النموذج Primd فيمكن إيجاد قيمة Y_1 و Y_2 وكذلك قيمة دالـة الهدف

بما أن $\text{Max } Z = \text{Min } W$

فإن $Z = W$

وبالعودة إلى جدول النهائي للحل الأمثل نلاحظ بأن معكوس المصفوف inversmatrix متمثلة بالجزء المظلل في مصفوفة المعاملات أي ما يُناظر المتغيرات الأساسـية S1 و R2 في الحـل الأسـاس الأول ويمكن توضيحها كما يلي:

$$\text{Optimal Inverse} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

وباستخدام الطريقـة الأولى لإيجـاد الحـل الأمثـل فـإن القيمـة المـثلى للمتغـيرات الأساسـية في Primal هـي X1 ، X2 هـذا يعنـي أن معـاملاتهم الأصـلية في دالـة الهـدف يجـب أن تظهـر حسـب التسلسل كما في جدول النهائي

$$\text{(Original objective coefficient)} = (\text{coefficient of } X_1 , \text{coefficient of } X_2)$$

$$(X_2 \qquad X_1) = (12, \qquad 5)$$

فإن الحل الأمثل للمتغيرات dual أي Y_1 و Y_2 يمكن حسابها كما يلي:

$$(Y_1 \quad Y_2) = (orginal \quad O.C \quad of \quad X_2, X_1) \times (Optimal \quad invers)$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$(Y_1 \quad Y_2) = \begin{pmatrix} \frac{29}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

أي أن:

$$Y_2^{\backslash\backslash} = -\frac{2}{5} \qquad \therefore Y_2^{\backslash} = \frac{2}{5}$$

$$Y_1 = \frac{29}{5}$$

نلاحظ أن قيمة Y_2 سالبة وهـذا يعـود إلى أن Y2 متغـير غـير مقيـد بالإشـارة Unrestricted Variable أي أن $Y_2 = Y_2^{\backslash} - Y_2^{\backslash\backslash}$ وبما أن Yi يجب أن تكون موجبة من ضمن شروط البرمجـة الخطيـة لذا تهمل $-\frac{2}{5}$ ونأخذ الجزء الموجب له أي:Y2 = 2/5

الطريقة الثانية: Method II

ويمكن إيجاد الحل الأمثل مباشرة من الحل الأمثل primal وباستخدام المعادلة التالية:

$$\begin{pmatrix} \text{Optimal Z – equation} \\ \text{coefficient of a starting} \\ \text{variable in the primal} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Difference between the left and right} \\ \text{sides of the dual constraint associated} \\ \text{with the starting variable} \end{pmatrix}$$

ملخص هذه الطريقة ننظر إلى معاملات دالة الهـدف في الحـل الأمثـل لــ Primal (معـاملات متغيرات الحل الأساسي الأولي S. B. F. S أي كل من S1و R2) وحسب المثال السابق.

لأن كل قيد في Primal قابله متغير واحد في dual أي أن Y1 = S1و Y2 = R2 وأن قيم هـذه المتغيرات مبينة في الحل الأمثل في معادلة Z-equation والمثال التالي يوضح الطريقة II

مثال (5):

بالعودة إلى المثال (4) فإن الحل المثل كان كما في الجدول أدناه:

Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	R_2	R.H.S
X_2	0	1	-1/5	2/5	-1/5	12/5
X_1	1	0	7/5	1/5	2/5	26/5
Z	0	0	3/5	29/5	-2/5+M	274/5

Optimal solution

S.B.F.S S_1 ; $Y_1 \geq 0$

S.B.F.S R_2 ; $Y_2 \geq -M$

فلو نظرنا إلى معاملات دالة الهدف Z وللجزء المضلل أي معامل S1 و R2 حيـث هـذه القـيم تمثل قيم Y1 و Y2:

$$Y_1 = \frac{29}{5}$$

$$Y_2 = -\frac{2^*}{5}$$

وهذه حسبت كما يلي:

$$-\frac{2}{5} + M = Y_2 - (-M)$$

$$Y_2 = -\frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad Y_2 = \frac{2}{5}$$

$$Y_1 - 0 = \frac{29}{5} \quad \rightarrow \quad Y_1 = \frac{29}{5}$$

أما قيمة دالة الهدف فإن

Max Z = Min W

$$\frac{274}{5} = \frac{274}{5}$$

ويمكن توضيحها كما في الجدول أدناه باستخدام المعادلة السابقة

Starting primal variables	S_1	R_2
Optimal z-equation coefficient	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2}{5} + M$
Left minus right-sides of the dual constraint associated with the starting primal variable	$Y_1 - O$	$Y_2 - (-M)$

نلاحظ هنا أن قيمة $Y1 = \frac{29}{5}$ و $Y2 = \frac{2}{5}$ هي نفس القيم إذا تم حل مسألة Dual بأسلوب Simplex وكما يلي:

Iteration	Basic	Y_1	Y'_2	Y''_3	S_1	S_2	S_3	AR_1	R_2	R_3	R.H.S
O	R_1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
Iteration	R_2	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
Starting	R_3	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4
		-10 + 4M	-8 + 4M	8 - 4M	-M	-M	-M	0	0	0	21M

وباستخدام أسلوب Simplex بأخذ متغير داخل وخارج ولأربع دورات فإن الجدول النهائي يكون كما يلي:

Optimal tablue

	Basic	Y_1	Y'_2	Y''_2	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	R.H.S
4	S3	0	0	0	-7/5	1/5	1	7/5	-1/5	-1	3/5
Iteration	Y_2	0	-1	1	2/5	-1/5	0	-2/5	1/5	0	2/5
Optimal	Y1	1	0	0	-1/5	-2/5	0	1/5	2/5	0	29/5
	W	0	0	0	-26/5	-12/5	0	26/5-M	12/5-M	-M	54 4/5

الحل الأمثل هي نفس القيم السابقة:

$$Y_1 = \frac{29}{5} \quad , \quad Y_2 = \frac{2}{5} \quad , \quad W = 54\frac{4}{5}$$

ومن هذا الجدول (الحل الأمثل) إلى Dual يمكن إيجاد الحل الأمثل إلى Primal وكما يلي:

Starting Dual Variable	R1	R2	R3
Optimal w-equation coefficient	26/5-M	12/5-M	-M
Left minus right side of the primal constraint associated with the dual starting variable	$X_1 - M$	$X_2 - M$	$X_3 - M$

فيمكن أن نجد قيمة X_3, X_2, X_1

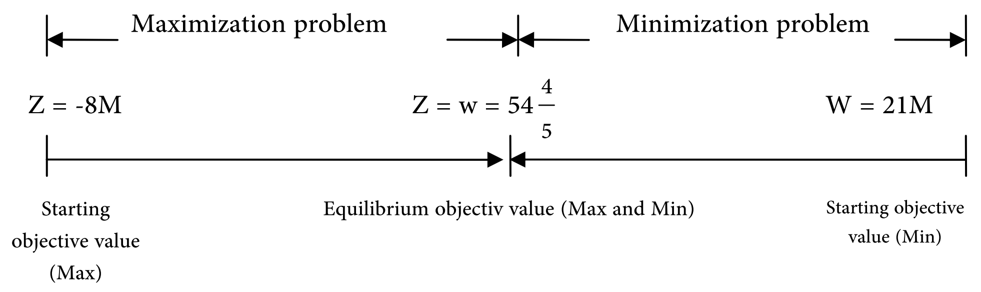
$$X_1 = \left(\frac{25}{5} - M\right) + M = \frac{26}{5}$$

$$X_2 = \left(\frac{12}{5} - M\right) + M = \frac{12}{5}$$

$$X_3 = (-M) + M \qquad = 0$$

وهي نفس الحل الأمثل إلى Primal

أما بالنسبة إلى قيمة دالة الهدف سواء كانت في Primal أو dual فيمكن اتباع المخطط التالي:



الخلاصة:

وبصورة عامة يمكن كتابة نموذج البرمجة الخطية ونموذج الثنائي بالصيغة العامة وكما يلي:

عندما تكون المسألة الأولية بالصيغة القياسية ستكون حالة المسألة الثنائية واحدة في الحالتين:

أولاً: عندما تكون جميع قيود على شكل معادلات قبل تحويلها إلى الصيغة القياسية Standard Form أي:

Maximize $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$$

$X_j \geq 0$

i = 1 , 2 , …. m

j = 1 , 2 , …. n

فإن المسألة الثنائية ستكون على الشكل:

Minimize $W = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \geq C_j$$

Yi unrestricted for all i

j = 1 , 2 , …. n

ثانياً: عندما تكون جميع القيود على شكل متباينات وقبل تحويلها إلى الصيغة القياسية :Standard Form

Maximize $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

X_j unrestricted for all i

المسألة الثنائية Dual ستكون على الشكل التالي:

Minimize $W = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i = C_j$$

$Y_i \geq 0$ i = 1 , 2 , …. m

j = 1 , 2 , …. n

ويمكن إعطاء شكل لعملية حل القيود العائدة إلى دالـة الهـدف والنتـائج المستحصـلة والتـي يمكن تسميتها كما يلي:

The starting basic variable are Si or Ri or both, In table 1, The inverse matrix associated with each iteration.

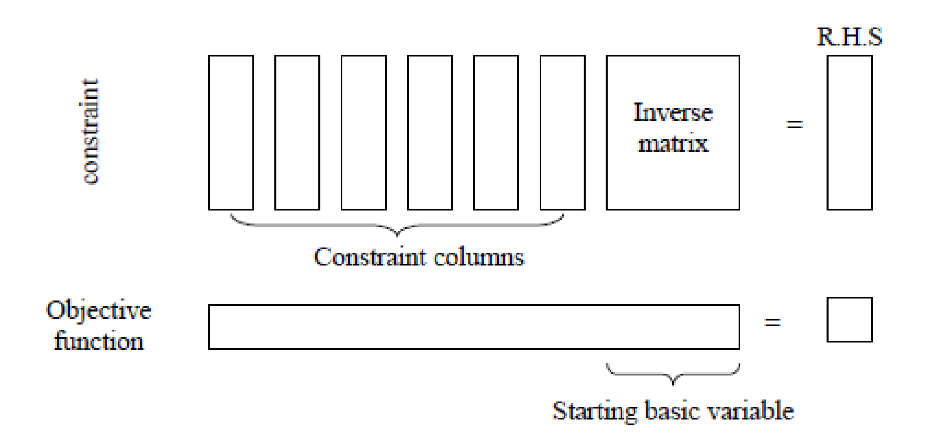


Table (2)

وهذا يمكن الاستفادة منه لحساب أي قيمة مجهولة في جداول (Iteration) في أي مرحلة مـن المراحل إذا كان inverse matrix معلوم للمتغيرات الأساسية الأولية، كما هي واضحة في المثال التالي:

مثال (6)

Consider the Problem

Max $Z = 5X_1 + 2X_2 + 3X_3$

subject to:

$$X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq b_1$$

$$X_1 - 5X_2 - 6X_3 \leq b_2$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

Where b1, b2, are constant, for specific values of b1 and b2 the optimal solution is:

Basic	X1	X2	X3	S1	S2	R. H. S
X1	1	b	2	1	0	30
S2	0	c	-8	-1	1	10
	0	a	7	d	e	150

Where a, b, c, d, e are constants.

Determine:

1- The values of b_1 and b_2 that yield the given optimal solution.

2- The optimal dual solution.

3- The value of a, b and c in the optimal solution.

Solution:

1- لإيجاد قيمة b1 , b2 قيم الطرف الأيمن للقيود نبحث عن معكوس المصفوفة Inverse matrix للمتغيرات الأساسية الأولية وهي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$b_1 + 0b_2 = 30$

$b_1 + b_2 = 10$

من المعادلة الأولى فإن $b_1 = 30$

بالتعويض في المعادلة الثانية نجد قيمة b_2

$b_2 = 10 + 30 = 40$

2- هنا المقصود إيجاد قيمة كل من e, d

حيث: $d = y_1$ و $e = y_2$

$$\begin{pmatrix} y_1 & , & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 5 = d$

$y_2 = 0 = e$

3- أما لحساب قيم c, b, a في الحل الأمثل:

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

معاملات X_2 من المعادلات

b = 5 c = -10

أما لحساب قيم a

X_2 – coefficient $5y_1 - 5y_2 \geq 3$

5 (5) – 5 (0) – 3 = 22 = a

3-4 طريقة Dual Simplex Method:

In section 3-3 we show that at any primal iteration zj - cj, the objective equation coefficient of xj, equals the difference between the left hand and right hand sides of associated dual constraint. When, in the case of maximization, the primal iteration is not optimal, zj, cj < o for at least one variable. Only at the optimum do we have zj - cj $\geq$ o for all j.

Looking at this condition from standpoint of duality, we have:

$$Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i - C_j$$

Thus, when $Z_j - C_j < 0$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i < C_j$, which means that the dual is infeasible when the primal is nonoptimal. On the other hand, when $Z_j - C_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \geq C_j$ which means the dual becomes feasible when the primal reaches optimality. The results above suggest a new solution method for Linear programs, which starts infeasible, the new method called the dual – simplex.

لقد عرفنا كيف يمكن تحويل صياغة النموذج الأولي **Primal** إلى صياغة النموذج الثنائي (مقابل) **Dual**، وقد عرفنا أهم ميزات النموذج الثنائي ولذلك يجب

أن نعرف طريقة سميلكس Simplex للنموذج الثنائي Dual حيث أن هناك على الأقل سببين عمليين لدراسة طريقة السميلكس للنموذج الثنائي وهما:

1- تمكننا طريقة Dual-Simplex من اختيار الحل الابتدائي بدون الحاجة إلى إضافة متغيرات اصطناعية artificial variables

2- تمكننا طريقة Dual-Simplex أيضاً إيجاد التحليلات الحساسية Sensitive Analysis وهذه الطريقة تكون مشابه إلى طريقة Simplex وتستخدم لحل المسائل التي تتصف بالصفات التالية:

1. دالة الهدف أما تكون Maximum أو Minimum.
2. عندما يحتوي الجانب الأيمن R.H.S للقيود على الأقل قيمة واحدة أو أكثر سالبة negative وهذا يحصل بعد تحويل القيد من أكبر ويساوي إلى أصغر ويساوي وذلك بضرب القيد في سالب واحد وهذا العمل يساعد إلى تحويل إشارة Slack variable من سالب إلى موجب (للتخلص من التغيرات الاصطناعية) واحتمال القيد أصلاً تكون القيمة الثابتة له سالبة.
3. نستخدم أسلوب Dual-Simplex في هذه الحالة إلى أن نصل إلى الحل الأمثل أي جعل كل الثوابت من الطرف الأيمن موجبة وهذا يتم باستخدام المتغير الداخل والخارج كما في أسلوب Simplex ولكن حسب الخطوات التالية:

فيما يلي خطوات أسلوب Dual - Simplex والمبينة من خلال المثال التالي:

مثال (7):

Minimum $Z = 2X_1 + X_2$

subject to:

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

خطوات العمل لحل المثال أعلاه هي:

1- القيد الأول والقيد الثاني علاقة أكبر من (≥) فلو وضعناها في صيغة أصغر من (≤) ذلك بضرب القيدين × (-1) يصبح:

$$-3X_1 - X_2 \leq -3$$

$$-4X_1 - 3X_2 \leq -6$$

2- نحول النموذج الرياضي إلى الصيغة القياسية standard form وكما يلي:

Min $Z = 2X_1 + X_2$

subject to:

$$-3X_1 - X_2 + S_1 = -3$$

$$-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$$

نلاحظ هنا لا وجود للحل الأساسي الأولي لأن كل من $S_1 = -3$ و $S_2 = -6$ و $S_3 = 3$ تمثل infeasible لذا نستخدم أسلوب Dual-simplex.

3- ننظم جدول يمثل بداية الحل:

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
0 Iteration	S_1	-3	-1	1	0	0	-3
	S_2	-4	-3	0	1	0	-6
	S_3	1	2	0	0	1	3
	Z	-2	-1	0	0	0	0

الحل الابتدائي هو:

$S_3 = 3$, $S_2 = -6$, $S_1 = -3$, $Z = 0$

إن الحل الابتدائي أعلاه حل غير مقبول لأن قيمة المتغيرات الأساسية سالبة.

وإذا لاحظنا في نفس الوقت دالة الهدف Z فإننا نستنتج أن معاملات متغيرات دالة الهدف سالبة وهذا يعني عدم إمكانية إيجاد الحل الأمثل.

فإذا كان R.H.S سالب فيمكن إيجاد الحل الأمثل لها باستخدام طريقة Dual-simplex حيث تختلف الطريقة هذه عن طريق simplex الأولية فقط في تحديد

المتغير الداخل Entering variable والمتغير الخارج Leaving variable لأن هذه الطريقة أيضاً تعتمد على شرطي الأمثلية والملائمة حيث أن شرط الأمثلية optimal condition يضمن استمرار ديمومة أمثلية الحل أما شرط الملائمة فيتضمن وقوع الحل في المنطقة الملائمة Feasible.

4- تحديد المتغير الخارج Leaving Variable: نختار أكبر رقم سالب في عمود الطرف الأيمن R.H.S وبموجب شرط الملائمة فإن $S_2 = -6$ هي أكبر رقم سالب.

تحديد المتغير الداخل Entering Variable:

المتغير الداخل عن طريق حساب نسبة معاملات المتغيرات في دالة الهدف إلى الرقم الذي يقابله في صف المتغير الخارج ونهمل القسمة على المقدار الصفري أو المقدار الموجب. وكما يلي:

Variable المتغيرات	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
Z – equation	-2	-1	0	0	0
S_2 – equation	-4	-3	0	1	0
	$\frac{-2}{-4}$	$\frac{-1}{-3}$			
Ration النسبة	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-	-	-

ومن الجدول هنا نرى أن النسبة الأصغر هي تحت المتغير X_2 فيكون هو المتغير الداخل Entering variable بموجب شرط الأمثلية optimum condition.

5- تطبق إجراءات الطريقة المبسطة simplex في معاملة الصفوف (حيث نقسم المعادلة المحورية على معامل X_2 في معادلة المحور أي تقسم جميع المعاملات على (3-) وتحول جميع معاملات العمود X_2 في جميع المعادلات الأخرى إلى الصفر فنحصل على الجدول التالي الدورة الأولى Iteration 1:

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
1 Iteration	S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
	X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
	S_3	-5/3	0	0	2/3	1	-1
	Z	-2/3	0	0	-1/3	0	2

إن الحل الجديد في هذه الدورة لا يزال حـل أمثـل لأن جميـع معـاملات دالـة الهـدف سـالبة وصفرية. لكن في نفس الوقت الحل غير ملائم Infeasible لأنـه لا تـزال هنـاك قـيم سـالبة في الطـرف الأيمن (لاحظ هنا أن اهتمامنا في هذا النوع من المسائل هو تجاه الوصـول إلى الحـل الملائـم حيـث أن المسألة أصلاً هي حل أمثل) أما في المسائل الاعتيادية هو العكس صحيح.

الدورة الثانية:

نلاحظ هنا لاختيار المتغير الخارج لدينا قيمتان سالبة أي $S_1 = -1$ و $S_3 = -1$ سنختار S_1 لـيكن المتغير المختار Leaving variable (لاختبار كيفي) وبموجب شرط الملائمة أما المتغير الداخل Entering variable بموجب شرط الأمثلية فهو X_1. وهذا يعطي الجدول الجديد:

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
2 Iteration	X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
	X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
	S_3	0	0	-1	1	1	0
	Z	0	0	-2/5	-1/5	0	12/5

هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل وفي نفس الوقت الحل الملائم.

نلاحظ لا وجود للقيم السالبة في الطرف الأيمـن R.H.S وجميـع معـاملات دالـة الهـدف O.F سالبة وصفرية.

فهنـا طريقـة Dual-simplex تعتـبر مقيـدة وخاصـةً في تحليـل الحساسـية Sensativity analysis، وكما سنوضحه في الخطوة القادمة.

3-5 تحليل الحساسية Sensativity analysis:

في معظم المشاكل العمليـة تكـون معـاملات دالـة الهـدف O.F، المصـادر المشـيرة، ومعـاملات المتغيرات الأخرى غير معروفة بصورة أكيدة. وقد يتطلب الأمر في بعض الأحيان تقديراً أو التنبـؤ بقـيم معاملات دالة الهدف.

ونحن نعلم ترغب الإدارات دائماً في إجراء بعض التغييرات على المعاملات المختلفة للحل الأمثل لأي مشكلة ما، ويمكن معرفة أكثر هـذه المتغـيرات في المعـاملات عـلى الحـل الأمثـل عـن طريـق حـل المسـألة مـرة أخـرى. ولكـن هـذا يتطلـب إجـراء حسـابات كثـيرة تتناسـب طرديـاً مـع عـدد القيـود Constraints والمتغيرات Variables.

فإذا وجدت مثل هذه المعـاملات غـير المعروفـة بصـورة أكيـدة فمـن الواضـح أن نبحـث عـن تأثيرات هذه المعاملات على الحل الأمثل حيث يمكن إيجاد حدود معينة لتغيير هذه المعاملات ويبقى الحل أمثل.

وإن تحليل الحساسية Senseativity analysis هو الاسم المشتق من تحليل تغير الحل الأمثـل وفقاً إلى تغير المعاملات المختلفة سواءً كانت هـذه المعـاملات مـواد أوليـة، أيـدي عاملـة، تكـاليف، أم أرباحاً...الخ.

Sensativity analysis is concerned with studing possible changes in available optimal solution as a result of making changes in the original model.

ومن التعريف أعلاه فكلما كانت هناك رغبة في إدخـال التغـيرات توجـب حـل المسـألة لمـرات أخرى. ولمعرفة أهمية تحليلات الحساسية لنأخذ مثـال Reddy Mikks Model مثـال (9) صـفحة 65 نموذج إنتاج الأصباغ الداخلية والخارجية لنعتبره ملائماً لعمل كل التغيرات التي يجب أن نقوم بها عـلى المتغيرات لأن النموذج يتعامـل في إنتاجيـة نـوعين مـن الأصـباغ وهـذا يتحقـق وفقـاً للطلبـات ضـمن الشروط المقيدة وكذلك وفقاً لنوعية المواد الخام المستخدمة وكما كان معروض في النموذج.

مثال (8):

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 2X_2 \quad \text{(profit)}$$

subject to:

$$X_1 + X_2 \leq 6 \quad \text{(raw material A)}$$

$$2X_1 + X_2 \leq 5 \quad \text{(raw material B)}$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1 \quad \text{(limit on demand)}$$

$$X_2 \leq 2 \quad \text{(limit on demand)}$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

وبعد حل هذا النموذج والتوصل إلى الحل الأمثل. فإن إدارة الشركة ترغب في التغيرات التاليـة حسب المعلومات الواردة لهم من قبل الشركة.

إن التغيرات التي يتم إجرائها على هذا النموذج هي:

1- تغيير قيم الطرف الأيمن للقيود

Changes in the Right side of constraints

2- إضافة قيد جديد

Addition of a new constraint

3- تغيير معاملات دالة الهدف

Changes in the objective function

4- تغيير معاملات القيود

Changes in the constraint coefficients (Changes in Activity's usage of Resources).

5- إضافة متغير جديد

Addition of a new activity.

إن هذه التغيرات تؤدي إلى واحد من الحالات الثلاث:

1- يبقى الحل الأمثل للمسألة كما هو دون أن يتأثر بالتغيرات الجديدة.

2- تبقى المتغيرات الأساسية هي نفسـها ولكـن ربمـا تتغـير قيمتهـا نتيجـة للتغـيرات الإضـافية (الجديدة).

3- يتغير الحل الأساسي بأكمله من جراء التغيرات الجديدة.

فيما يلي ملخص خطوات تحليل الحساسية وفقاً لما ذكرنا سابقاً.

The general procedure for carrying out sensitivity analysis can be summarized as follows:

Step 1: Solve the orginal L.P model and obtain its optimal simlex tableau.

حل النموذج الأصلي للبرمجة الخطية للوصول إلى الحل الأمثل.

Step 2: For proposed changes (s) in the orginal model. Recompute the new elements of current optimal tableu by using the primal-Dual computations.

بعد عرض التغيرات الحاصلة في النموذج الأصلي أعد حسابات العناصر الجديدة من الجدول باستخدام أسلوب primal-dual

Step 3: If the new tableau is nonoptimal, go to step 4 if it is infeasible, go to step 5, other wise, record the solution in the new tableau as the new optimum. Stop

إذا كان الجدول الجديد non optimal اذهب إلى خطوة 4 أما إذا كان غير ملائم اذهب إلى خطوة 5، غير ذلك سجل في الجدول الجديد كحل أمثل.

Step 4: Apply the regular simplex method to the new tableau to obtain a new optimal solution (or indicate that the solution is unbounded).

استخدم أسلوب simplex للجدول الجديد إلى أن تصل إلى الحل الأمثل.

Step 5: Apply the Dual simplex method to the new tableau to recover feasibility (or indicate that no feasible solution exists).

استخدم أسلوب Dual-simplex على الجدول لتوصل إلى الحل الملائم feasibile:

لو رجعنا إلى سؤالنا عن شركة Reddy Mikks ونطبق عليه أسلوب تحليل الحساسية حسب الخطوات السابقة باستخدام الملخص أعلاه:

Reddy Mikks primal	Reddy Mikks Dual
Max $Z = 3X_1 + 2X_2$	Min $W = 6Y_1 + 8Y_2 + Y_3 + 2Y_4$
subject to:	subject to:
$X_1 + 2X_2 \leq 10$	$Y_1 - 2Y_2 - Y_3 \geq 3$
$2X_1 + X_2 \leq 8$	$2Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 2$
$-X_1 + X_2 \leq 1$	
$X_2 \leq 8$	$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$
$X_1, X_2 \geq 0$	

الحل الأمثل في Primal هو:

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3

وهذا الجدول يمثل الحل الأمثل حيث يكون كمية الإنتاج من الأصباغ $X_2 = \frac{4}{3}$ أما من الأصباغ $X_1 = \frac{10}{3}$ وهذه العملية تحقق ربح قدره $Z = \frac{38}{3}$ ولكن هناك فائض من العملية الإنتاجية من القيد الثالث $S_3 = 3$ و القيد الرابع $S_4 = \frac{2}{3}$.

1- التغيرات في الطرف الأيمن Changes in the R.H.S:

الحالة الأولى:

افرض أن الموارد التامة للنموذج Reddy Mikks من المواد الخام A ازدادت إلى 7 بدلاً من 6 ما هو تأثير ذلك على الحل الأمثل.

سيكون أثر هذا التغير على عمود قيم المتغيرات فقط في جدول الحل الأمثل أي عمود (R.H.S) أي التأثير على منطقة الحل الملائم للمسألة. ولحساب قيم الطرف الأيمن الجديد بعد إدخال التغير وكما يلي:

1- قيم المتغيرات الأساسية الجديدة هي مصفوفة عمودية تمثل المتغيرات الأساسية أي:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}$$

2- مصفوفة المتغيرات الأساسية الأولية أي كل من (S_1 , S_2 , S_3 , S_4) من الحل الأمثل. المقصود هنا معكوس مصفوفة المعاملات A^{-1} والمتمثلة:

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الجزء المظلل من الجدول

3- عمود الطرف الأيمن الجديد في المسألة الأصلية بعد التغيرات أي:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

القيد الأول

القيد الثاني

القيد الثالث

القيد الرابع

4- الحل الأساسي الجديد للمسألة يكون:

Basic

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

new right side of the tableau

الحل الجديد في الجدول وبما أن بقاء المتغيرات الأساسية كما هي من غير تغيير ولكن فقط تغيرت قيمتها وأصبحت كما يلي:

$X_2 = 2$

$X_1 = 3$

$S_3 = 2$

استغلال تام للموارد $S_4 = 0$

أما قيمة دالة الهدف (Z):

$$Z = 3\ (3) + 2(2) = 13$$

هذه زيادة أدت إلى زيادة الربح إلى 13 وحدة بـدلاً مـن $\frac{38}{3}$. وكـذلك غـيرت الإنتاجيـة لــX_1 بالزيادة أما X_2 فقد تم تقليل الإنتاج.

الحالة الثانية:

نفرض الآن إذا زادت قيم الطرف الأيمن على الشكل التالي القيد الأول مـن 6 إلى 7 طـن القيـد الثاني من 8 إلى 4 طن فإن الحل الجديد يكون:

الحل الجديد
$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

أصبح الحل غير أساسي أي أن التغيرات الجديدة أثرت على قيم $S_3 = -2$ و$S_4 = \frac{-4}{3}$ لـذا يجـب أن نستخدم أسلوب Dual-simpex لتحسين الحل والتخلص من non Feasibile solution والجـدول التالي يبين العمل الحسابي من متغير داخل وخارج.

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	10/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	1/3
S_2	0	0	-1	1	1	0	-2
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	-4/3
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	23/3

نلاحظ هنا قيمة (Z) هي:

$$Z = 3(\frac{1}{3}) + 2(\frac{10}{3}) = \frac{23}{3}$$

الجدول أعلاه هو حل أمثل لأن جميع معاملات دالة الهدف موجبة وصفرية لكن حل غير ممكن (ملائم) infeasible لأن هناك قيم سالبة من الطرف الأيمن من الحل وهذا لا يجوز لذا نستخدم أسلوب dual-simplex فإن المتغير الداخل Entering variable هو X_2 أما S_2 فهو المتغير الخارج Leaving variable وباستخدام خطوات السمبلكس العادية لجعل X_3 متغير أساسي نحصل على الجدول التالي:

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
X_2	0	1	0	1/3	2/3	0	2
X_1	1	0	0	1/3	-1/3	0	1
S_1	0	0	1	-1	-1	0	2
S_4	0	0	0	-1/3	-2/3	1	0
Z	0	0	0	5/3	1/3	0	7

لو نظرنا إلى معاملات دالة الهدف فهي حل أمثل وكذلك الطرف الأيمن كل القيم موجبة يعني تحقق Feasible أما الحل الجديد هو:

$X_2 = 2$, $X_1 = 1$

$Z = 3(1) + 2(2) = 7$

فإن الحل تحسن في بعض الأحيان باستخدام أسلوب dual-simplex يمكن تحتاج إلى أكثر من دورة واحدة لتحقيق الحل الأمثل والملائم.

2- إضافة قيد جديد Addition of a new constraint:

إن إضافة قيد جديد يؤثر على شرط الملائمة للحل الأمثل الحالي للمسألة عندما يكون لهذا القيد دوراً فعالاً، يترتب على ذلك أن نقوم كخطوة أولى بفحص القيد الجديد المضاف هل هو مستوفي في الحل الأمثل؟

فإذا كان الجواب نعم فيهمل ويبقى الحل الأمثل كما هو دون تغيير unchange solution.

أما إذا كان الجواب لا فإنه يجب اتخاذ الإجراءات اللازمة لإدخال هذا القيـد الجديـد في نظـام المسألة.

هذا عند إضافة قيد جديد يمكن أن يؤثر على أحد الشرطين:

1- The constraint is satisfied by the current solution, in which case the constraint is either nonbinding or redundant and its addition will thus not change the solution.

2- The constraint its not satisfied by current solution. It will thus become binding and the new solution is obtained by using the dual-simplex method.

ولتوضيح هذه الحالتين افرض أن الطلب اليومي على الأصباغ الخارجية لا تزيد عن 3 طن، فإن القيد يكون:

$$X_1 \leq 3$$

فإن هذا القيد يجب أن يضاف إلى النموذج ثـم إعـادة الحـل. ولكـن بمـا أنـه يمكـن اسـتخدام تحليلات الحساسية ومن الحل الأمثل النهائي يمكن إجراء التغيرات الذي يجب أن تحدث. وبإضافة هذا القيد لا يحقق الحل الأمثل current solution أي قيمة:

$$X_1 = \frac{10}{3} \quad , \qquad X_2 = \frac{4}{3}$$

لذا نحتاج إلى تحسين مجال الحل وذلك:

1- حول القيد الجديد إلى الصيغة القياسية بإضافة slack variable أو surplus.

2- نضيف هذا القيـد إلى الحـل الأمثـل النهـائي ولكـن نلاحـظ هنـا أن كـل مـن X_1 و X_2 هـم متغيرات أساسية ويجب أن تكون جميع المعـاملات تحـت المتغـيرين في القيـد الإضـافي تسـاوي صـفر. ولتحقيق ذلك يجب التخلص من (1) تحت عمود X_1 حيث نجمع المعادلة التاليـة مـع معادلـة القيـد الجديد S_4 نجعل معاملات X_1 , X_2 في معادلة S_4 تساوي صفر ويمكن توضيحها بالعمل الحسـابي وكـما يلي:

$$X_1 \leq 3$$

$X_1 + S_5 = 3$

الجدول يكون:

	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R.H.S
	X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	0	4/3
	X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	0	10/3
	S_2	0	0	-1	1	1	0	0	3
	S_3	0	0	-2/3	1/3	0	1	0	2/3
New constraint	S_4	1	0	0	0	0	0	1	3
	Z	0	0	1/3	4/3	0	0	0	38/3
	X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	0	4/3
	X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	0	10/3
	S_3	0	0	-1	1	1	0	0	3
	S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	0	2/3
	S_5	0	0	1/3	-2/3	0	0	1	-1/3
		0	0	1/3	4/3	0	0	0	

3- وباستخدام أسلوب dual-simplex لأن الطرف الأيمن أصبح negative وهذا إشارة إلى infeasible وهنا نطبق الشرط الثاني المسبق للتوصل إلى الحل الأمثل فإن المتغير الخارج هو S_5 وأن S_2 هو المتغير الداخل وبعد تحسين الحل إلى أن تصل إلى الحل الأمثل الملائم كما هو موضح في الجدول أدناه:

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R.H.S
X_2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	3/2
X_1	1	0	0	0	0	0	1	3
S_3	0	0	-1/2	0	1	0	3/2	5/2
S_4	0	0	-1/2	0	0	1	1/2	1/2
S_2	0	0	-1/2	1	0	0	-3/2	1/2
Z	0	0	1	0	0	0	2	12

وهذا هو الحل الأمثل ولكن نلاحظ هنا تغيير غير جيد لأن قيمة دالة الهدف انخفضت إلى 12 وهذا يمكن أن يحصل بإضافة قيود جديدة.

ملاحظة: هنا في حالة تغيير الطرف الأيمن R.H.S وإضافة قيد جديد كأن له تأثير على fesability أو ما يسمى (Changes Affecting feasibility).

3- تغيير معاملات دالة الهدف Changes in the objective function:

يؤثر التغير في معاملات دالـة الهـدف عـلى أمثليـة الحـل للمسـألة optimality. فعنـد إجـراء تحليلات الحساسية sensativity analysis يجب أن نفرق فيما إذا كان التغير في معاملات دالة الهدف coefficient of O.F يشمل المتغيرات الأساسية فقط أو المتغيرات الغير أساسية فقـط أو كلـيهما. فـإذا كان التغير يشمل معاملات المتغير الأساسية basie في معادلـة دالـة الهـدف فـإن المضـاعفات المبسـطة Simplex Multipliers هي التي تتغير وعليه يجب إعادة حساب المضاعفات المبسطة قبل أن تـدفق أمثلية حل المسألة. أما إذا كان يشمل معاملات المتغـيرات الغـير أساسـية non-basic في معادلـة دالـة الهدف فإن المضاعفات المبسطة تبقى كما هي دون تغيير ويمكن أن تدفيق أمثليـة الحـل مبـاشرة. أمـا إذا شمل التغير كل معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية basic and non-basic في معادلة دالة الهـدف objective function لحسـاب Z – equation coefficients معـاملات دالـة الهـدف فهنـاك نقطتان يجب ملاحظتها:

1- If changes in the objective function involve the coefficient of acurrent basic variable, determine the new dual values and then use them to recompute the new Z-equation coefficients.

2- If the changes involve non basic variables only, use the current dual values (directly from the current tableua) and recompute the Z-equation coefficients of the involved non basic variable only. No other changes will occur in the tableau.

بالعودة إلى سؤال Reddy Mikks Model لإجراء تغييرات على دالة الهدف، لو فرضنا أن دالة الهدف تغيرت مـن $Max\ Z = 3X_1 + 2X_2$ إلى $Max\ Z = 5X_1 + 4X_2$ هنـا التغـيرات شـملت كـل مـن المتغيرين X_1 , X_2 ماذا سيحدث للحل الأمثل بهذا التغـير. وبـالرجوع ولتوضـيح هـذه الحـالتين لنأخـذ مثال Reddy Mikks Model.

مثال (9):

Suppose that the Reddy Mikks Model the objective function is changed from:

Max $Z = 3X_1 + 2X_2$ to Max $Z = 5X_1 + 4X_2$

نلاحظ هنا التغيرات شملت كل من المتغيرين الأساسيين X_1 و X_2. السؤال ما هو تأثير هذا التغير على الحل الأمثل السابق. ويمكن حسابها حسب الخطوات التالية:

1- يجب أن تحدد قيم Y_i الجديدة (new dual value).

2- باستخدام معكوسة مصفوفة معاملات المتغيرات الأساسية في الحل الأساسي الأول (S.B.F.S) في الحل الأمثل.

3- تحدد مصفوفة المعاملات الجديدة للمتغيرات الأساسية حسب موقعها في الحل الأمثل أي (X_2 , X_1 , S_3 , S_4) أي أن معامل X_2 يرد قبل معامل X_1.

4- نحسب قيمة Y_i الجديدة كما يلي:

$$\begin{pmatrix}\text{Value of dual}\\ \text{variable at}\\ \text{interation i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{New objective coefficient}\\ \text{of primal basic variable in}\\ \text{Iteration i}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Inverse in}\\ \text{Iteration i}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 & , & Y_2 & , & Y_3 & , & Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & , & 5 & , & 0 & , & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{8}{3} + \frac{-5}{3} + 0, \quad \frac{-4}{3} + \frac{10}{3} + 0 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ 0 \right)$$

$$= \left(\frac{8-5}{3} \ , \ \frac{6}{3} \ , \ 0 \ , \ 0 \right)$$

$$= (\ 1 \ , \ 2 \ , \ 0 \ , \ 0 \ )$$

هذا يعني أن:

$Y_1 = 1$

$Y_2 = 2$

$Y_3 = 0$

$Y_4 = 0$

5- بعد حساب قيم Y_i الجديد نحسب معاملات دالة الهدف Z كما يلي:

$$\begin{pmatrix}\text{Element of } X_j \text{ in} \\ \text{the objective} \\ \text{equation}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Lef side of} \\ \text{corresponding dual} \\ \text{constraint}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Right side of} \\ \text{corresponding} \\ \text{dual constraint}\end{pmatrix}$$

وبعد استخدام القاعدة الأعلى فتكون معاملات دالة الهدف في الجدول الجديد كما يلي:

X_1 – Coefficint = $Y_1 + 2Y_2 - Y_3 - 5$

$= 1 + 2\ (2) - 0 - 5 = 0$

X_2 – Coefficint = $2Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 4$

$= 2\ (1) + 2 + 0 + 0 - 4 = 0$

S_1 – Coefficint = $Y_1 - 0 = 1 - 0 = 1$

S_2 – Coefficint = $Y_2 - 0 = 2 - 0 = 2$

S_3 – Coefficint = $Y_3 - 0 = 0 - 0 = 0$

S_4 – Coefficint = $Y_4 - 0 = 0 - 0 = 0$

هذا يعني أن معاملات دالة الهدف للجدول هـي موجبـة أو تسـاوي إلى صـفر هـذا يعنـي لا تغيير على الحل فقط تغيير في قيمـة دالـة الهـدف Z وهـذه تحسـب بعـد ضرب قيمـة X_1 و X_2 مـن معاملاتها الجديدة أي:

$$5 \times \frac{10}{3} + 4\left(\frac{4}{3}\right) = 22$$

أما لتطبيق الحالة الثانية لنأخذ مثال (9) وإجراء تعديل عليه كما يلي:

Recompute the Z-equation coefficient:

If we change the objective function from:

$$Z = 3X_1 + 2X_2 \quad \text{to} \quad Z = 4X_1 + X_2$$

وباستخدام الخطوات السابقة نلاحظ ما يلي:

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & , & \frac{7}{3} & , & 0 & , & 0 \end{pmatrix}$$

هنا نلاحظ أن معاملات دالة الهدف قيمة سالبة والتي تقابل $S_1 = -\frac{2}{3}$ و $S_2 = \frac{7}{3}$ و $S_3 = 0$

و $S_4 = 0$ لذا يجب تحقيق دالة الهدف الجديدة والتي أصبحت كما يلي:

Iteration	Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
S_1 enters X_2 leaves	X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
	X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
	S_3	0	0	-1	1	1	0	3
	S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
	Z	0	0	-2/3	7/3	0	0	44/3

نختار متغير داخل S_1 أما المتغير الخارج الوحيد الذي يحمل إشـارة موجبـة مـا يقابـل X_2 هـو المتغير الخارج وباستخدام أسلوب simplex تحول S_1 إلى متغير أساسي ليصبح الجدول الجديد كما يلي:

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
S_1	0	3/2	1	-1/2	0	0	2
X_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4
S_3	0	3/2	0	1/2	1	0	5
S_4	0	1	0	0	0	1	2
Z	0	1	0	2	0	0	16

Optimal solution

4- تغيير معاملات القيود Changes in Activity's Usage of Resources:

إن تغيير معاملات القيود يمكن أن يـؤثر عـلى شرط الأمثليـة للمسـألة الأوليـة Primal أمـا في المسائل الثنائية Dual يمكن أن تؤثر على الجانب الأيسر لقيود المسألة الثنائية Dual-Constraint أي تؤثر على شرط الملائمة للمسألة Feasibility

إن أهم نقطة في تغيير طبيعة معاملات المتغيرات الأساسية basic variable هي أن هذا التغير changes سوف يؤثر على عناصر المصفوفة لجدول الحل الابتدائي (Inverse). وبما أن هـذه المصـفوفة تلعب دوراً مهماً في كل حسابات تحليلات الحساسية Sensetivity analysis عليه فإن التغـير الجديـد new changes قد يؤدي إلى جعـل الحـل الحـالي للمسـألة غـير ملائـم و Infeasible وغـير أمثـل no optimal، أو ربما قم يصبح غير أساسي أصلاً non-basic.

لكن في بعض الأحيان تواجهنا بعض المشاكل في مثل هـذا النـوع مـن التغيـيرات هـي صـعوبة دراسة أثر التغير الذي يشمل معاملات المتغيرات الأساسية basic variable على الحل الأمثل optimal solution يضاف إلى ذلك أن التحليلات والحسابات سوف لن تزودنا بصورة مباشرة وآنيـة بالمعلومـات التي تتعلق بالأمثلية والملائمة للمسألة الجديدة (بعد إدخال التغير) لذا يجب إعادة حل المسألة.

ولهذه الأسـباب التـي ذكرناهـا سـوف نناقش التغـيرات changes التـي تحـدث في معـاملات المتغيرات الغير أساسية non-basic coefficient فقط.

لو فرضنا نموذج Reddy Mikks Model بدالة الهدف:

$$\text{Max} \quad Z = 4X_1 + X_2$$

هي حل أمثل optimal ولما وضحنا في الجدول السابق صفحة (142) فإن المتغير X_2 هو متغير غير أساسي non-basic هنا ويمكن تحسين معـاملات قيـده Modifying its constraint coefficient والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (10): (بالرجوع إلى مثال 8)

Suppose that the usages by activity 2 of raw material A and B are 4 and 3 tons instead of 2 and 1 tons.

ومنها نفهم أن معاملات المتغير X_2 لدى المواد الخام A و B تغيرت من 2 طن إلى 4 طن في القيد الأول ومن 1 طن إلى 3 طن في القيد الثاني، لذا فإن القيد المقابل له في Dual سوف يكون كما يلي:

$$4Y_1 + 3Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 1$$

نلاحظ هنا أن الطرف الأيمن R.H.S له يمثل معامل X_2 في دالة الهدف والتي ذكرت سابقاً:

$$Z = 4X_1 + X_2$$

وبما أن دالة الهدف لم تتأثر بهذا التغير، فإن قيمة متغيرات الثنائية تبقى كما هي (موضحة في الجدول السابق ص142) لذا فإن دالة الهدف Z-equation بالنسبة إلى معامل X_2 تحسب كما يلي:

$$\text{New } X_2 - \text{Cofficient} = 4\,(0) + 3\,(2) + 1\,(0) + 1\,(0) - 1 = 5$$

وأن هذا المعامل موجب وأكبر من الصفر هذا يعني لا يؤثر على الحل الأمثل للمسألة بهذه المتغيرات الجديدة لمعاملات المتغير X_2.

5- إضافة متغير جديد Addition of a New Activity:

إن إضافة متغير جديد يؤثر على أمثلية المسألة حيث أن إضافة هذا المتغير سيضيف معاملات جديدة إلى دالة الهدف وقيود المسألة. فإن هذا المتغير الجديد new activity المضاف قد يصبح متغيراً أساسياً إذا دخل الحل ويكون له دور في تحسين الحل (قيمة دالة الهدف). أما إذا لم تكن له القدرة على تحسين قيمة دالة الهدف فإنه سيكون متغيراً غير أساسي non-basic وتكون قيمته صفر.

مثال (11): بالعودة إلى مثال رقم (8) Reddy Mikks Model.

Suppose that we are intrested in producing a cheaper brand of exterior paint which uses $\frac{3}{4}$ ton of each of raw material A and B per ton of new paint. The relation between interior and exterior paints as expressed in constraint (3) will remain binding except that now both

types of exterior paint must be considered in the new constraint. The profit per ton of new paint is $\$1\frac{1}{2}$ thousand.

افرض أن المتغير الجديد هو X_3 فإن النموذج الأصلي للمسألة تصبح كما يلي:

$$\text{Max} \quad Z = 3X_1 + 2X_2 + 1\frac{1}{2}X_3$$

s.t.:

$$X_1 + 2X_2 + \frac{3}{4}X_3 \leq 6$$

$$2X_1 + X_2 + \frac{3}{4}X_3 \leq 8$$

$$-X_1 + X_2 - X_3 \leq 1$$

$$X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

نلاحظ هنا إضافة المتغير الجديد X_3 ومعاملاتها كما في دالة الهدف والقيود فإذا فرضنا أن هذا المتغير موجود أصلاً في المسألة هذا يعني أن X_3 هو non-basic متغير غير أساسي وقيمتها مساوية إلى الصفر، ولبيان مدى تأثير هذا المتغير لنتبع الخطوات التالية:

1- بأخذ Dual لهذا المتغير هذا يعني إضافة قيد جديد إلى المسألة الثنائية، والقيد يكون كما يلي:

$$\frac{3}{4}Y_1 + \frac{3}{4}Y_2 - Y_3 \geq \frac{3}{2}$$

2- نجد معامل X_3 من الحل الأمثل (Primal) بواسطة قيد Dual باعتبار أن X_3 اعتبرت متغير غير أساسي وأن قيمة كل من $Y_1 = \frac{1}{3}$ و $Y_2 = \frac{4}{3}$ و $Y_3 = 0$ في الحل الأمثل:

$$\text{New } X_3 - \text{coefficient} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) - 1\ (0) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}$$

هذا يعني أن معامل X_3 في معادلة دالة الهدف سالبة إذن X_3 سوف تحسن الحل لأن X_3 غير مستوفي للشروط المبرمجة ويصبح X_3 متغير أساسي. ولتحسين الحل الأمثل فيجب إضافة عمود X_3 بالطرف الأيسر مع قيمة دالة الهدف والمساوية إلى $-\frac{1}{4}$ Z-equation coefficient ويمكن حساب معاملات هذا المتغير في الحل الأمثل كما يلي:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Inverse matrix X_3

S.B.F.S Coefficient

والجدول أدناه يبين معاملات X_3 في الحل الأمثل مع قيمة معامل دالة الهدف في optimal:

Iteration	Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
1	X_2	0	1	1/4	2/3	-1/3	0	0	4/3
(starting)	X_1	1	0	1/4	-1/3	2/3	0	0	10/3
X_3 enter	S_3	0	0	-1	-1	1	1	0	3
X_2 leaves	S_4	0	0	-1/4	-2/3	1/3	0	1	2/3
	Z	0	0	-1/4	1/3	4/3	0	0	38/3
2	X_3	0	4	1	8/3	-4/3	0	0	16/3
(optimal)	X_1	1	-1	0	-1	1	0	0	2
	S_3	0	4	0	5/3	-1/3	1	0	25/3
	S_4	0	1	0	0	0	0	1	2
	Z	0	1	0	1	1	0	0	14

Optimal solution

مثال (12):

Consider the following L.P model:

Max $\quad Z = 9X_1 + 14X_2 + 6X_3$

subject to:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 9$$

$$4X_1 - 3X_2 + 5X_3 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

والجدول التالي يبين الحل الأمثل لهذا النموذج:

Iteration	Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	R_2	R.H.S
3	X_2	0	1	-1/7	4/7	-1/7	32/7
(optimal)	X_1	1	0	8/7	3/7	1/7	31/7
	Z	0	0	16/7	83/7	-5/7 +M	727/7

1- Suppose that it is decided to increase the R.H.S for the first constraint from 9 to 1 and the second constraint from 4 to 5 .. Find the new solution.

2- Suppose that if the coefficient of X_1 and X_2 is changed to $X_1 = 2$ and $X_2 = 4$

3- Suppose the changes of the coefficient of X_3 from $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ to $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solution:

1) من الحل الأمثل الجدول الأخير تبين Inverse matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

فإن قيمة المتغيرات الأساسية في الجدول تكون كما يلي:

$$\text{New} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} - \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} + \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة تمثل قيمة الطرف الأيمن الجديد أي أن قيمة X_2 أصبحت سالبة أي غير ملائمة infeasible وهي (1/7-) وعليه فإن الحل الأمثل أصبح غير ملائم لذا يجب التوصل إلى الحل الأمثل الملائم باستخدام الطريقة dual-simplex لذا نحسب قيمة دالة الهدف على ضوء هذا التغير:

$$Z = 9\left(\frac{2}{7}\right) + 14\left(\frac{-1}{7}\right) + 6\ (0) = \frac{58}{7}$$

والآن ننظم جدول الحل مع ملاحظة الإبقاء على جميع المعاملات المتغيرات دون تغيير باستثناء (R.H.S) في جدول الحل الأمثل كما يلي:

Iteration	Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	R_2	R.H.S
1	X_2	0	1	-1/7	4/7	-1/7	-1/7
starting	X_1	1	0	8/7	3/7	1/7	8/7
X_2 leaves X_3 enteur	Z	0	0	16/7	83/7	-5/7+M	58/7
2	X_3	0	-7	1	-4	1	+1
(optimal)	X_1	1	8	0	35/7	-1	0
	Z	0	16	6	147/7	-21/7+M	42/7

الحل الأمثل وأن قيمة $Z = \frac{42}{7}$ انخفضت دالة الهدف وأصبح الحل في صيغة الإحلال أي أن قيمة X_1 = صفر.

2)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1 & , & Y_2 \end{pmatrix}$$

$$S_1 \text{ coefficient} = \frac{22}{7} - 0 = \frac{22}{7}$$

$$R_2 \text{ coefficient} = \frac{-2}{7} - (-M) = \frac{-2}{7} + M$$

بما أن حاصل كلا العاملين موجب أكبر من الصفر إذاً شرط الأمثلية هنا مستوفي تطبيقه.

نحسب بقية معاملات دالة الهدف:

$$X_1 \text{ - coefficient} = 1\ (\frac{22}{7}) + 4\ (\frac{-2}{7}) - 2 = 0$$

$$X_2 \text{ - coefficient} = 1\ (\frac{22}{7}) - (\frac{-2}{7}) - 4 = 0$$

$$X_3 \text{ - coefficient} = 1\ (\frac{22}{7}) + 5\ (\frac{-2}{7}) - 6 = -\frac{30}{7}$$

هنا معامل X_3 سالب أي أن جدول الحل لا يعطي الحل الأمثل وعليه يجب الاستمرار بحل المسألة باستخدام أسلوب simplex:

Iteration	Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	R_2	R.H.S
1	X_2	0	1	-1/7	4/7	-1/7	32/7
starting	X_1	1	0	8/7	3/7	1/7	31/7
X_3 leaves X_1 enteur	Z	0	0	-30/7	22/7	-2/7+M	190/7
2	X_2	1/8	1	0	5/8	-1/8	41/8
(optimal)	X_3	7/8	0	1	3/8	1/8	31/8
	Z	30/8	0	0	38/8	2/8+M	350/8

3) تغيير معاملات العمود X_3 من $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$:

1- هذا يعني أن القيد في المسألة الثنائية المقابلة لـX_3 هي:

$$-5Y_1 + 2Y_2 \geq 6$$

2- تحسب المعاملات الجديدة لـX_3 في معادلة دالة الهدف:

$$X_3 \text{ - coefficient} = -5\ (\frac{83}{7}) + 2\ (\frac{-5}{7}) - 6 = -\frac{467}{7}$$

هذا يعني أن معامل X_3 في دالة الهدف سالبة إذن الجدول ليس بحل أمثل لذا نغير معاملات X_3 في الحل الأمثل ليصبح كما يلي:

Iteration	Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	R_2	R.H.S
1	X_2	0	1	-22/7	4/7	-1/7	32/7
(starting)	X_1	1	0	-13/7	3/7	1/7	31/7
	Z	0	0	-467/7	83/7	-5/7 +M	727/7

ومن الجدول أعلاه نجد أن هذا التغير على معاملات X_3 أدت إلى مسألة جديدة غير محـدودة الحل unbounded لأن هناك متغير داخل X_3 ولا وجود للمتغير الخارج لأن جميـع المعـاملات سـالبة في هذا العمود والتي حسبت كما يلي:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{22}{7} \\ -\frac{13}{7} \end{pmatrix}$$

أسئلة الفصل الثالث

1- Write the duals of the following problems:

a- Maximize $Z = -5X_1 + 2X_2$

subject to:

$-X_1 + X_2 \leq -3$

$2X_1 + 3X_2 \leq 5$

$X_1 , X_2 \geq 0$

b- Minimize $Z = 6X_1 + 3X_2$

subject to:

$6X_1 - 3X_2 + X3 \geq 2$

$3X_1 + 4X_2 + X_3 \geq 5$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

c- Maximize $Z = 5X_1 + 6X_2$

subject to:

$X_1 + 2X_2 = 5$

$-X_1 + 5X_2 \geq 3$

X_1 unrestricted

$X_2 \geq 0$

d- Minimize $Z = 3X_1 + 4X_2 + 6X_3$

subject to:

$X_1 + X_2 \geq 10$

$X_1 , X_3 \geq 0$

$X_2 \leq 0$

2- Find the optimal solution of the dual from the optimal solution of the following linear programming model:

Maximize $Z = 5X_1 + 2X_2 + 3X_3$

subject to:

$X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 30$

$X_1 - 5X_2 - 6X_3 \leq 40$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

3- Consider the following linear program:

Maximize $Z = X_1 + 5X_2 + 3X_3$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 3$$
$$2X_1 - X_2 = 4$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

Using a starting solution consisting of X_3 and R in the second constraint. We obtain the following optimum tableau:

Basic	X_1	X_2	X_3	R	R.H.S
X_3	0	5/2	1	-1/2	1
X_1	1	-1/2	0	1/2	2
Z	0	2	0	-1+M	5

Write the dual problem and find its optimal solution from the optimal primal tableau.

4- By using X_3 and X_4 as the starting Basic variables. Find optimal solution of dual from the primal:

Maximize $Z = 2X_1 + 4X_2 + 4X_3 - 3x_4$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 + X_3 = 4$$
$$X_1 + X_2 + X_4 = 8$$
$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 \geq 0$$

5- For the pair of primal – Dual problem given below, determine whether the following pairs of solution are optimal:

a) $(X_1 = 10 \;,\; X_2 = \frac{10}{3} \;;\; Y_1 = 0 \;,\; Y_2 = 1 \;,\; Y_3 = 1)$

b) $(X_1 = 20 \;,\; X_2 = 10 \;;\; Y_1 = 1 \;,\; Y_2 = 4 \;,\; Y_3 = 0)$

c) $(X_1 = \frac{10}{3} \;,\; X_2 = \frac{10}{3} \;;\; Y_1 = 0 \;,\; Y_2 = \frac{5}{3} \;,\; Y_3 = \frac{1}{3})$

Primal

Minimize $Z = 2X_1 + 3X_2$

Subject to:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 10$$
$$X_1 - X_2 \geq 0$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Dual

Maximize $W = 30Y_1 + 10Y_2$

Subject to:

$$2Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 2$$
$$3Y_1 + 2Y_2 - Y_3 \leq 3$$
$$Y_1 \leq 0 , Y_2 \geq 0 , Y_3 \geq 0$$

6- Consider the following linear program expressed in standard form:

Maximize $Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

subject to:

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + S_1 = 30$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 60$$

$$X_1 + 4X_2 + S_3 = 20$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$$

The following matrices represent the inverse and their corresponding basic variables associated with different simplex iteration of the problem compute the associated constraint equations of each iteration and determine the corresponding basic variable and their values

a) (S_1 , X_3 , S_3) ; $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) (X_1 , X_3 , X_1) ; $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) (X_2 , X_3 , S_3) ; $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7- The final optimal tableau of a maximization linear programming problem with three constraint of type ($\leq$) and two unknow (X_1 , X_2) is:

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	0	0	1	1	-1	2
X_2	0	1	0	1	0	6
X_1	1	0	0	-1	1	2
Z	0	0	0	3	2	?

Find the value of the objective function Z in two different ways by using the primal-dual relation ships if S_1 , S_2 , S_3 are slack variable.

8- The optimal simplex tableau for Maximum problem with all constraint of type ($\leq$)

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
X_2	0	1	1/2	-1/2	0	2
X_1	1	0	-1/8	3/8	0	3/2
S_3	0	0	1	-2	1	4
Z	0	0	1/4	1/4	0	5

Where X_1 , X_2 are the decision variables suppose that it is decided to increase the right-hand side of one of the constraints. Which one to you recommend for expansion and why? What is the maximum a mount of in crease in this case? Find the correspooning new value of the objective function.

9- Solve the following problem be the dual simplex method:

Maximize $Z = 2X_1 + 3X_2$

subject to:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$
$$X_1 + 2X_2 \geq 10$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

10- Use dual simplex to solve the following linear programming:

Manimize $Z = 5X_1 + 6X_2$

subject to:

$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$4X_1 + X_2 \geq 4$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

11- Consider the problem:

Maximize $Z = 2X_1 - 5X_2$

subject to:

$$X_1 + X_3 \geq 2$$

$$2X_1 + X_2 + 6X_3 \geq 6$$

$$X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

a) Write the dual.

b) Solve the primal then find the solution to the dual.

c) Suppose that the R.H.S of the primal is changed from (2 , 6 , 0) to (2 , 10 , 5) find the new solution.

d) Suppose that the coefficient of X_2 and X_3 in the objective function are changed from (2 , -5) to (1 , 1) find the new solution.

الفصل الرابع

نماذج النقل

Transportation Model

الفصل الرابع

نماذج النقل

Transportation Model

4-1 المقدمة Introduction:

This Chapter presents the transportation model and its variants in the obvious sense. The transportation deals with a special class of linear-programming in which the objective is to "transport" a single commodity from various "origins" to different "destinations" at a minimum total cost. The total supply available at the origins, and total quantity demanded by the destinations are given in the statement of the problems. Also given the cost of shipping a unit of goods from a known origin to a known destination. As we discussed in the pervious chapter all relationship in the linear-programming problem assumed to be linear. Therefore, the transportation mode is used to determine the optimum shipping program(s) resulting in minimum total shaping costs.

سنتناول في هذا الفصل إلى أحد الأساليب الكمية الشائعة الاستخدام والمهمة في تطبيقات البرمجة الخطية Linear programming والتي تدعى بنماذج النقل Transportation model وتهدف هذه النماذج إلى تقليل كلفة النقل لبضاعة ما تتوفر لدى مجموعة من مصادر التجهيز Sources لتوزيعها على مجموعة من مراكز الطلب Destinations لتلبية احتياجات تلك المراكز بشرط أن يكون العرض من قبل مصدر التجهيز والطلب من مراكز الطلب.

(Shipping Commodity from Sources factories, to destination, warehouses, the objective is to determine the shipping schedule that total shipping cost while satisfying supply and demand limits).

وبالرغم من أن مشكلة النقل transportation problem يمكن معالجتها وحلها بالطريقة البسيطة للبرمجة الخطية Regular Simplex method إلا أن المزايا والمواصفات الخاصة التي تمتع بها مشكلة النقل يمكننا من تطبيق طرق خاصة أخرى أسهل بكثير من طرق الحل بأسلوب البرمجة الخطية التقليدية.

4-2 تعريف نموذج النقل Definition of Transportation Model

إن نمـوذج النقـل Transportation Model هـو مـن الـنماذج الرياضـية Mathematical Model والمشتقة من النموذج البديل العام للبرمجـة الخطيـة، ولكـن مصـمم لمعالجـة مشـاكل النقـل وتوزيع البضائع والخدمات.

ويمكن عرض المشكلة (مشكلة النقل) بشكل شبكة عمل network وكما هو واضـح في جـدول (1) لو فرضنا هناك M من المصـادر (Sources) تتـوفر لـديهم كميـات معينـة ومعروفـة للتصـدير أو التصريف والمقصود هنا بالمصدر "يعني المركز الإنتاجي أو التسويقي أو أي مركز تنتقل فيه البضـاعة"، وكما توجد مجموع من مراكز الطلـب Destination (N) والمتمثلـة بالنهايـة Node التـي تحتـاج إلى كميات محدودة من البضاعة والمـواد المعروضـة مـن قبـل مصـادر التجهيـز، هنـا node "تعنـي مركـز الطلب أو الاستهلاك أو أي مركز ترسل إليه البضائع"، أما السهم arcs تمثـل الطـرق routes لـربط كـلٍ sources بمراكز الطلب destination والمتمثلة بـ (i,j) فإن i تمثل sources والمرتبطة بـ destination j حيث أن i = 1 , 2 ... n أمـا j = 1 ,2 ... N وإن عمليـة ربـط sources i بـــ destinations j تحمـل نوعين من المعلومات وهي:

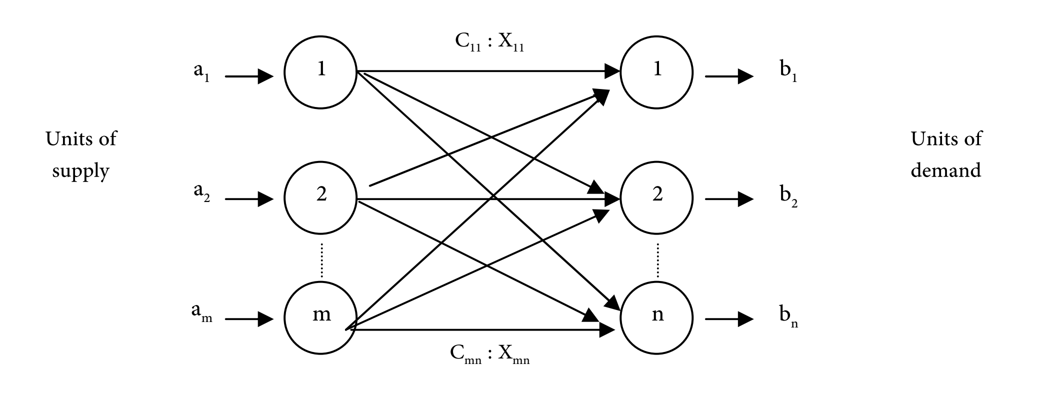
1- كلفة النقل لكل وحدة واحدة، (ويرمـز لهـا Cij) مـن البضـاعة مـن مصـادر التجهيـز i إلى مراكز الطلب j.

2- أما الكمية المنقولة من مصدر i إلى مركز الطلب بـ Xij وهذه تمثل الكمية المنقولـة أمـا ai فتمثل مقدار العرض supply (الكميات المتاحة لدى كـل مصـدر تجهيـز أي $a_1 , a_2 \ldots a_m$).

وكذلك bj تمثل مقدار الطلب demand التي تحتاج إلى الكميات المتوفرة لدى مصادر التجهيز b1, b2 … bn.

أما الهدف objective of the model من نموذج النقل هو تحديد عدد الوحدات المنقولة من مصدر التجهيز i إلى مركز الطلب j بحيث تكون كلفة النقل الإجمالية أقل ما يمكن.

Objective of the Model is to determine the unknowns Xij that will minimize the total transportation cost while satisfying all the supply and demand restrictions.



جدول (1)

مخطط توضيحي للمصادر مع مراكز الطلب

Nodes and Arcs

ولتسهيل دراسة المشكلة ومن ثم إيجاد الحلول المطلوبة نقوم بوضع مشكلة النقل على شـكل جدول وهذا الجدول يسمى بجدول النقل Transportation Table تقسم جداول النقـل إلى قسـمين هما جدول التكاليف Cost Table وجدول التوزيع Distribution Table حيث جـدول التوزيـع هـو عبارة عن الكميات المنقولة من المصدر i إلى مركز الطلب j.

والجـدول التـالي يوضـح هـذين الجـدولين بـافتراض عـدد m = 3 sources وعـدد المراكـز N = 2 Destination.

Sources \ Destination	1	2	Supply
1	C_{11}	C_{12}	a_1
2	C_{21}	C_{22}	a_2
3	C_{31}	C_{32}	a_3
Demand	b_1	b_2	

جدول (2)

جدول التكاليف Cost table

إن C_{11} تمثل كلفة نقل الوحـدة الواحـدة مـن البضـاعة مـن sources الأول إلى Destination الأولى أيضا.

أمـا C_{31} تمثـل كلفـة نقـل الوحـدة الواحـدة مـن البضـاعة، مـن 3 Sources إلى node أو (1) Destination، وهكذا أما a1 عبـارة عـن الكميـة المعروضـة مـن قبـل source الأول و a_2 كميـة البضاعة المعروضة من قبل المصدر الثاني ... الخ، أما b_1 عبارة عن الكمية المطلوب لـدى مركـز الطلـب الأول destination و b2 كمية المطلوب من قبل destination 2 (مركز الطلب الثاني) ... الخ.

أما الجدول التالي يمثل الكمية المنقولة من المصادر إلى مراكز الطلب.

Sources \ Destination	1	2	Supply
1	X_{11}	X_{12}	a_1
2	X_{21}	X_{22}	a_2
3	X_{31}	X_{32}	a_3
Demand	b_1	b_2	

جدول (3)

يبين الكميات المنقولة X_{ij}

حيث X_{11} تمثل الكمية المنقولة من المصدر I إلى المخازن (مركز طلب)destination 1.

و X32 تمثل الكمية المنقولة من المصدر 3 إلى مركز الطلب أو Destination 2 ... الخ.

ومن هذا يمكن دمج الجدولين بجدول واحد والذي يسمى بجدول Transportation Model وكما يلي:

Destination / Sources	destination 1	destination 2	Supply
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	a_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	a_2
3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	a_3
Demand	b_1	b_2	

جدول (4)

يمثل الكلفة مع الكمية المنقولة لجداول النقل

نلاحظ هنا حصرناً الكلفة داخل خلية صغرى في على لتكون واضحة وعدم دمجها مع الكمية المنقول Xij.

ويمكننا الآن التعبير رياضياً عن نموذج النقل المستوفي لافتراضات أعلاه كآلاتي:

تعبر دالة الهدف objective function في عملية النقل وبأقل كلفة ممكنة.

$$\text{MiniMum } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{b} C_{ij} \quad X_{ij}$$

علماً بأن المحددات التي ينبغي مراعاتها واستبقائها عند حل النماذج المتعلقة بالنقل أو يمكن القول وفقاً إلى القيود التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \le a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \ge b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

إن القيد الأول نلاحظ أن الكمية المطلوبة في source i لا تزيد على الكمية المعروضة في ذلك المصدر.

أما القيد الثاني أن الكمية المنقولة إلى Destination مراكز الطلب j يجب أن لا تقل عن حاجة تلك المراكز.

أما بالنسبة إلى شرط المتوفر $X_{ij} \ge 0$ فإنّ الكمية المنقولة دائماً موجبة أو تساوي صفر.

إن النموذج أعلاه مع دالة الهدف هو عبارة عن صيغة البرمجة الخطية لذا فإن مجموع العرض يجب أن يكون مساوياً إلى الطلب وعندما تظهر هذه الحالة أي أن $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ وهذه تظهر في حالة توازن السوق فقط لذا يسمىbalance transportation model في هذه الحالة يمكن التعبير عن النموذج كما هي في حقيقتها والتي يجب أن تكون على هيئة مساواة.

The Model described above implies that the total supply $\sum_{i=1}^{m} a_i$ must at least equal total demand ($\sum_{j=1}^{n} b_j$). When the total supply equals. the total demand ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$), the resulting formulation is called a balance trans portation model. It differs from the model above only in the fact that all constraints are equations, that is:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

ذكرنا هنا يجب أن تكون مشكلة النقل متوازنة لكن ليس بـالضرورة في كـل مشـاكل النقـل في بعض الأحيان يمكن أن يكون العرض أكبر أو أصغر وخاصاً في حياتنا العملية وحسب متطلبات السوق، لكن بشكل عام يجب أن تكون المشكلة متوازنة balance يمكن حلها إما في حالة عـدم التـوازن يجـب النظر في تلك المسائل وهذا سوف يتم تغطية في الفقرات القادمة.

فالنموذج الرياضي لمشكلة النقل بصيغة البرمجة الخطية تكون:

$$\text{Min} \qquad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \; X_{ij}$$

subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i = 1 , 2 , ... , m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j = 1 , 2 , ... , n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

فالمطلوب هو إيجاد القيم Xij التـي تجعـل مجمـوع الكلفـة الكليـة total cost Z أو بعبـارة أخرى تجعل دالة الهدف أقل ما يمكن وتحقق الشروط الموضوعة على المشكلة.

4-3 حلول مشاكل النقل Solution of the Transportation Problems

في هذا الجزء تبين خطوات حل نماذج النقـل، فبالإمكـان حـل جميـع مشـاكل النقـل بطريقـة أخرى أسهل بكثير من اتباع طريق البرمجـة الخطيـة المعروفـة بــ Simplex، إلا أن الطريقـة الجديـدة يتطلب الجدول الذي ذكر سابقاً جدول رقم (4) ولأجل الوصـول الحـل المطلـوب فـيما يـلي الخطـوات الأساسية التالية:

Step I:

تحديد الحل الأساسي الأولي:

Determine a starting Basic Feasible solution.

هناك ثلاث طرق يمكن اتباعها لإيجاد الحل الابتدائي الأساسي للمشكلة:

1- طريقة الركن الشمال – الغربي North – west – corner – method

2- طريقة أقل الكلف Least – cost – method

3- طريقة ڤوجل Vogel's- Approximation – Method (Penalty method)

Step II:

Determine an entering variable from among the non basic variables. If all such variables satisfy the optimal condition "stop", otherwise, go to step III.

بعد إيجاد الحل الأساسي الأولي كما في Step II يتم تحسين الحل وذلك "بتحديد المتغير الداخل" entering variable من بين المتغيرات الغير أساسية non-basic variables فإذا كانت هذه المتغيرات تحقق شروط الحل الأمثل "توقف" أما إذا لا اذهب إلى الخطوة (III).

Step III:

Determine a Leaving variable (using feasibility condition) from among the variable of the current basic solution, then find the new basic solution. Return to step II.

وهي مرحلة التأكد أو الاختيار لضمان الوصول إلى أفضل الحلول الممكنة أي التأكد من تحقق شروط الأمثلية، وذلك بتحديد المتغير الخارج Leaving variable باستخدام شروط الملائمة Feasibility condition من بين متغيرات الحل الأساسي الأولي S. B. F. S ثم أوجد الحل الجديد والعودة إلى خطوة II.

ويمكن توضيح هذه الخطوات بواسطة المثال التالي:

مثال 1:

The vehicle of explanation is the problem in Table (5). the unit transportation cost cij is in dollars. The supply and demand are given in number of units. Find the staring basic solution.

		destination		مراكز الطلب		العرض
		1	2	3	2	Supply
مصادر Sources التجهيز	1	10 X_{11}	0 X_{12}	20 X_{13}	11 X_{14}	15
	2	12 X_{21}	7 X_{22}	9 X_{23}	20 X_{24}	25
	3	0 X_{31}	14 X_{32}	16 X_{33}	18 X_{34}	5
Demand		5	15	15	10	

جدول رقم (5)

إن الأرقام الموجودة داخل المربعات الصغيرة في الجدول (5) أعلاه تمثل كلفة النقل بالدولار.

Solution:

1- يجب التأكد من توفر شرط التوازن Balance

إلى أن:

$$\sum a_i = \sum b_j$$

طلب = عرض

2- الحصول على الحل الأساسي الأولي مجال الحل S. B. F. S لهذا السؤال هـو: M + n - 1 أي تساوي عدد المتغيرات الأساسي 6 = 1 – 4 + 3 Basic variable وللحصول عـلى الحـل الأسـاسي الأولي بواسطة أحد الطرق الثلاثة السابقة.

1. طريقة الركن الشمالي الغربي.
2. أقل الكلف
3. طريقة فوجل

فهنا سوف نستخدم الطرق الثلاثة لهذا المثال:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي North – West – Corner - Method

تعتمد هذه الطريقة على الزاوية الشمالية الغربيـة للجـدول ولهـذا السـبب سـميت بطريقـة الركن الشمالي الغربي، وتعتبر هذه الطريقة من أسهل الطرق على الإطـلاق حيـث لا يسـتخدم فيهـا أي منطق رياضي لتوزيع الكميات المعروضة لدى المصدر لتلبية احتياجات مراكز الطلب وأن أسلوب الحل يقوم على أساس التالي:

1. نجد مجموع العرض والذي يساوي

Supply = 15 + 25 + 5 = 45

وكذلك نجد مجموع الطلب والذي يساوي:

Demand = 5 + 15 + 15 + 10 = 45

نلاحظ هنا حالة التوازن أن أي S = D

2. نبدأ بالخلية X_{11} من الجدول (5) ثـم تقـارن الطلـب Demand والعـرض Supply المقابـل للخلية X_{11} أي مقارنة الكمية المطلوبة من قبـل Destination الأول بالكميـة المتاحـة لـدى sources الأول ونخصص أقل الكميتين للخلية الأولى X_{11} أي:

Min (5, 15) = 5

هذا يعني تخصص 5 وحدات لـ X_{11} ستؤدي إلى تغطيه مركز الطلب الأول بالكامل هذا يعنـي أن قيمة الطلب لديه تساوي إلى صفر.

3. نحذف الصف Row أو العامود Column الـذي يسـاوي عرضـه أو طلبـه إلى الصـفر، فهنـا نحذف العمود الأول لأنه استوفى كل المقدار، وفي نفس الوقت يتم تعديل العـرض المتـوفر Sources 1 ليصبح 10 بدلاً من 15 أي (10=5-15) كما هو واضح بعد كل عملية تلبية الاحتياجـات للحفـاظ عـلى توازن.

Destination

	1	2	3	4	Supply
1	5 [10]	X_{12} [0]	X_{13} [20]	X_{14} [11]	~~15~~ 10
2	[12]	X_{22} [7]	X_{23} [9]	X_{24} [20]	25
3	[0]	X_{32} [14]	X_{33} [16]	X_{34} [18]	5
Demand	~~5~~ 0	15	15	10	45

جدول (6)

ننتقل إلى X12 إن الكمية المتوفرة لدى (1) sources هي 10 وحدات في حين الكمية المطلوبة من قبل (2) destination هـي 15 وحـدة، هـذا يعنـي يمكـن تلبيـة عشر وحـدات إلى X12 ليصـبح العرض يساوي إلى الصفر أما مقدار الطلب فيكون 5=10-15 وحدات، كـما هـو واضـح في جـدول (7) فيتم حذف الصف الأول.

Destination

	1	2	3	4	Supply
1	5 [10]	10 [0]	X_{13} [20]	X_{14} [11]	~~15~~ 0
2	[12]	X_{22} [7]	X_{23} [9]	X_{24} [20]	25
3	[0]	X_{32} [14]	X_{33} [16]	X_{34} [18]	5
Demand	~~5~~ 0	~~15~~ 5	15	10	

جدول (7)

الآن ننتقل إلى المصدر الثاني 2 sources فإن مقدار العرض هو 25 وحدة أما مركز الطلب الثاني destination 2 لـ 5 وحدات لذا يمكن استيفاء 5 وحدات من العرض الثاني فإن مركز الطلب الثاني يغذي المتغير X_{22} بـ 5 وحـدات

فالعرض هنا يساوي 20 = 5 – 25 أما الطلب فيساوي صفر فنحذف هـذا العمـود كـما هـو واضـح في الجدول (8)

Destination	1	2	3	4	Supply
1	[10] 5	[0] 10	[20]	[11]	~~15~~ 0
2	[12]	[7] 5	[9]	[20] X_{24}	~~25~~ 20
3	[0]	[14]	[16] X_{33}	[18] X_{34}	5
Demand	~~5~~ 0	~~15~~ 0	15	10	45

جدول (8)

الآن تقارن بين الكمية المعروضة لـدى المصـدر (2) والبالغـة 20 بالكميـة المطلوبـة مـن مركـز طلب 3 والبالغة 15 وحدة فيتم تخصيص أقل الكميتين إلى المتغير X23

Min (15, 20) = 15

أي باستطاعة مصدر التجهيز الثاني من تغطيته ما يحتاجه مركز الطلب الثالث بالكامـل وذلـك بتخصيص 15 وحدة إلى المتغير X_{23} وبهذا نحذف مركز طلب 3 لأن طلـب أصـبح (15–15) مسـاوياً إلى صفر، كما هو واضح في الجدول أدناه (جدول رقم 9).

Destination	1	2	3	4	Supply
1	[10] 5	[0] 10	[20]	[11]	0
2	[12]	[7] 5	[9] 15	[20] X_{24}	~~25~~ 5
3	[0]	[14]	[16]	[18] X_{34}	5
Demand	~~5~~ 0	~~15~~ 0	~~15~~ 0	10	45

جدول (9)

والآن ننتقل إلى المتغير X24 نلاحظ لدينا عرض متبقي لدى المصدر (2) ما يساوي 5 وحدات لعدم نفاذ جميع الوحدات أما مركز الطلب 4 لديه كمية 10 وحدات لذا يمكن تخصيص 5 وحدات للمتغير X24 فيصبح العرض مساوياً إلى الصفر في هذا الصف Row أما مقدار الطلب المتبقي لدى هذا العمود (4) يساوي 5-10 أي 5 وحدات فهنا نحذف الصف الثاني لاستفاءه كل العرض وهذا واضح في الجدول التالي (10).

Destination

	1	2	3	4	Supply
1	[10] 5	[0] 10	[20]	[11]	~~15~~ 0
2	[12]	[7] 5	[9] 15	[20] 5	~~25~~ 0
3	[0]	[14]	[16]	[18] X_{34}	5
Demand	~~5~~ 0	~~15~~ 0	~~15~~ 0	~~10~~ 5	45

جدول (10)

بعد نفاذ كل الكمية المعروضة في الصف الثاني تصل إلى الصف الثالث والمتمثلة بالمصدر 3 فإن مقدار العرض لديه 5 وحدات وهذه تكون تخصيص مركز طلب 4 والذي يحتاج إلى 5 وحدات لتلبية طلبه لذا يستوفي من المصدر الثالث إلى مركز الطلب الرابع فإن قيمة X34 تساوي 5 وحدات حيث تم هنا إشباع احتياجات مركز طلب الرابع بالكامل من قبل المجهز الثالث فتم استيفاء كل العرض والطلب أي أصبحت قيم كل العرض مساوية إلى الصفر وكذلك قيم كل مراكز الطلب هذا يعني توصلنا إلى الجدول النقل بصيغته النهائية كالآتي:

Destination

	1	2	3	4	Supply
1	[10] 5	[0] 10	[20]	[11]	15
2	[12]	[7] 5	[9] 15	[20] 5	25
3	[0]	[14]	[16]	[18] 5	5
Demand	5	15	15	10	45

جدول (11)

من الجدول أعلاه تلاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية (المربعات المشغولة بالكمية المنقولة Xij) مساوية إلى مجال الحل m + n - 1 أي 6 = 1 – 4 + 3 متغيرات أساسية وهي تمثل الحل الأساسي الأول فإن Basic variables

$$\left.\begin{array}{l} X_{11} = 5 \\ X_{12} = 10 \\ X_{22} = 5 \\ X_{23} = 15 \\ X_{24} = 5 \\ X_{34} = 5 \end{array}\right\} \quad \text{S.B.F.S}$$

أما بقية المتغيرات فيكون متغيرات غير أساسية non - basic.

4- نجد الحل الأساسي الأولى والمتمثلة بالكلفة الكلية total cost وذلك بضرب كل متغير أساسي في الكلفة المناظرة لها في المربع وبجميع هذه الكلفة تمثل Transportation cost.

Total cost = 5 x 10 + 0 x 10 + 5 x 7 + 15 x 9 + 5 x 20 + 5 x 18

الكلفة الإجمالية 540$

حل المثال السابق بطريق أقل الكلف least cost

2- طريقة أقل الكلف Method–Least – Cost :

إحدى مساوئ طريقة الركن الشمالي الغربي North west corner هو عدم الاستفادة من الكلف القليلة المتوفرة في مشكلة النقل عند تغطية مراكز الطلب destination أي أن مراكز الطلب تطلب البضاعة بدون النظر إلى الكلف بما معناه لا يحاولون الاستفادة من تباين الأسعار لإشباع متطلباتهم بأقل كلفة بل هدفهم تأمين احتياجاتهم من أي مصدر تجهيز وبأي كلفة نقل.

لذا فإن طريقة أقل الكلف Least - cost وضعت لمعالجة مثل هذا النوع من العيوب في نماذج النقل حيث يتم البحث والتركيز على أقل كلفة cij متوفرة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب والعرض المقابل لتلك الكلفة متبعين نفس خطوات الطريقة السابقة لتغطية احتياجات مراكز الطلب أما خطوات هذه الطريقة هي:

1- ننظر إلى جميع كلف الجدول ثم نختار أقل كلفة ممكنة، بعد تحديد مكان، أصغر كلفة نحدد عرضها وطلبها ثم نقارن بين ما هو متوفر لدى المجهز من كميات مع ما يحتاجه مركز الطلب، ففي المثال السابق لو نظرنا إلى جدول رقم(5) نلاحظ أن أقل كلفة هي صفر وأن هذه كلفة متوفرة في C12 وكذلك C31 لذا نختار أحدهم فليكن C12 والتي تقابل مركز طلب ثاني مع المصدر الأول فما هو متوفر لدى مصدر (1) ما يعادل 15 وحدة وما يحتاجه مركز الطلب الثاني هو 15 وحدة لذا يتم تخصيصها للمتغير X12 هذا يعني يتم استيفاء العرض والطلب في آن واحد وأن X12 = 15 وبعدها نحذف صف Row الأول والعمود Column الثاني لأن أصبحت قيمهم مساوية إلى الصفر، وكما هو واضح في الجدول التالي:

Destination

	1	2	3	4	Supply
1	10	0 15	20	11	~~15~~ 0
2	12	7	9	20	25
3	0	14	16	18	5
Demand	5	~~15~~ 0	15	10	45

جدول (12)

نلاحظ أنه قد تم حذف صف والعمود في آن واحد هذا يعني لا يمكننا تخصيص أي كمية أخرى إلى المتغيرات X11, X13, X14 وكذلك X32, X22 أي أن هذه المتغيرات ستكون غير أساسية non-basic وقيمتها مساوية إلى الصفر.

نبحث الآن عن كلفة قليلة أخرى ضمن جدول نقل، هنا C31 تقابل قيمة مساوية إلى الصفر فإن مركز التجهيز الثالث يقدم ما هو متوفر لديه من كميات إلى مركز الطلب الأول، لذا يستوفي كل العرض فيصبح مساوياً إلى الصفر وكذلك يستوفي كل طلب ويصبح صفر أيضاً أي أن X31 تساوي 5 هنا يتم إشباع احتياجات مركز طلب (1) بالكامل من قبل مصدر الثالث كما في جدول (13).

Destination

	1	2	3	4	Supply
1	10	0 15	20	11	15
2	12	7	9 15	20	~~25~~ 10
3	0 5	14	16	18	~~5~~ 0
Demand	~~5~~ 0	15	~~15~~ 0	10	

جدول (13)

ويلاحظ من الجدول تم إشباع العرض الثالث وطلب الأول، ولم يبق سوى المصدر الثاني لتلبية احتياجات مركز طلب الثالث والرابع لذا فإن C23 هي أقل كلفة لذا يتم إشباع كامل لمتطلبات المركز الثالث والمساوية إلى 15 ويستوفي هذا من العرض لدى مصدر (2) فيصبح 15 - 25 ويساوي 10 وحدات وهذه سوف نذهب إلى مركز الطلب الرابع لتلبية احتياجاتهم بالكلفة الموجودة أي بغض النظر عن قيمتها لذا فإن قيمة X24 تساوي 10 فيتم إشباع كامل لمركز الطلب الرابع في العرض في مصدر (2) وكما هو واضح في الجدول (14).

Destination

	1	2	3	4	Supply
1	[10]	[0] 15		[11]	15
2	[12]	[7]	[9] 15	[20] 10	25
3	[0] 5	[14]	[16]	[18]	5
Demand	5	15	15	~~10~~ 0	45

جدول (14)

إن الجدول أعلاه يمثل النقل بصيغته النهائية وبالمتغيرات الأساسية التي تمثل الحل الأساسي الأولي وهي:

Basic variable

X12 = 15

X23 = 15 SBFS

X24 = 10

X31 = 5

هنا عدد المتغيرات الأساسية لا تساوي مجال الحل m + n - 1 هذا يعني هناك إحلال.

2- نحسب الكلفة الكلية وذلك بضرب كل كلفة للمتغير الأساسي في الكمية المنقولة المقابلة لها وكما يلي:

Total Cost = 15 x0 + 5 x 0 + 15 x 9 + 10 x 20 = 335

وهذه الكلفة هي أفضل من الذي حسبت بطريقة North west corner الزاوية الشمالية الغربية

ملاحظة: إذا كانت هناك كلفتين متشابهتين بين كلفة النقل فبالإمكان اختيار أحدهما عشوائياً، أو اختيار أحدهما ثم الثانية فيما بعد.

3- طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximation Method

أو طريقة (VAM):

تعتبر هذه الطريقة أفضل الطرق الثلاثة ويرمز لها بـ VAM مختصر Vogel's Approximation Method حيث تعطي حل أساسي أولي أفضل ويكون قريباً من الحل الأمثل Optimum solution، ولكن هذه الطريقة تحتاج إلى بعض العمليات الحسابية لاختيار الكلفة لتوزيع الكمية المنقولة عليها. وتتلخص هذه العمليات الحسابية بالخطوات التالية.

Step 1:

Evaluate a penalty for each (column) by subtracting the smallest cost element in the (column) from the smallest cost element in the same (column).

نحسب كلف الجزاء وذلك بالفرق ما بين أصغر كلفتين في الصف أو في العمود.

Step 2:

Identify the row or column with the largest penalty, breaking ties arbitrarily.

Allocate as much as possible to the variable with the least cost in the selected row or column. Adjust the supply and demand and cross out the satisfied row or column. If row or column are satisfied simultaneously, only one of them is crossed out and the remaining row (column) is assigned a zero supply (demand). Any row or column with zero supply or demand should not be used in computing future penalties (in step 3).

Step 3:

a. If exactly one row or one column remains uncrossed out stop,

b. If only one row (column) with positive supply (demand) remains uncrossed out, determine the basic variables in the row (column) by the least-cost method.

c. If all uncrossed-out rows and columns have (assigned) zero supply and demand determine the zero basic variables by the least-cost method stop.

d. Otherwise, recomputed the penalty for the uncrossed-out rows and columns, then go to step 2. (Notice that the row and columns with assigned zero supply and demand should not be used in computing these penalties).

ويمكن تلخيص ذلك بالخطوات التالية:

1- حساب الفرق (penality) كل صف row في جدول النقل وذلك بطرح أقل كلفتين لها والتي تقع بنفس الصف.

2- حساب الفرق (penalty) كل عمود column في جدول النقل وذلك بطرح أقل كلفة في العمود من الكلفة القليلة التالية لها والتي تكون في نفس العمود.

3- نختار أكبر فرق (penalty) ممكن ما بين فروقات الصف والعمود معاً(Maximum penalty).

4- نحدد المتغير الذي يقابل أصغر كلفة في الصف أو العمود المختار في فقرة (3).

5- نستوفي الكمية المعروضة من الطلب لذلك المتغير بعد تخصيص أقل الكميتين (Min demand, supply).

6- يعدل جدول النقل بعد إشباع المتغير المعني بالكمية المطلوبة.

7- إذا تم إشباع الطلب بالكامل ونفاذ الكمية المعروضة لدى المصدر sources في آن واحد يتم حذف إحداهما وجعل مستوى الطلب أو العرض ثابتاً في حسابات الفروق (penalty cost).

8- في حالة عدم تغطية احتياجات بعض مراكز الطلب بالكامل تعاد الخطوات السابقة أعلاه بهدف الوصول إلى الحل الأمثل أو الوصول إلى الصيغة المثلى لعملية نقل المواد من المجهزين إلى جميع مراكز الطلب لتغطية متطلبات مراكز الطلب المختلفة.

سيتم توضيح طريقة فوجل VAM بالاستعانة بمثالنا السابق رقم (1) ثم نقارن الكلفة الكلية لهذه الطريقة بالكلف الكلية التي تم الحصول عليها بموجب الطرق السابقة.

Destination

	1	2	3	4	Supply	Row penalty
1	10	0	20	11	15	10
2	12	7	9	20	25	2
3	0	14	16	18	5	14
Demand	5	15	15	10	45	
Column penalty	10	7	7	7		

جدول (15)

كلف الجزاء للصف والعمود

- نجد الفرق في الكلف للصفوف والأعمدة كما في جدول (15).
- نختار أكبر فرق في الصف الثالث لديه أكبر فرق Largest penalty والمساوية إلى 14:

Max (10, 2, 14, 10, 7, 7, 7) = 14

- نبحث عن أقل كلفة في هذا الصف التي تقابل C31 ومساوية إلى صفر ثم تستوفي مقدار الطلب والمساوي إلى 5 من المصدر الثالث والمساوي 5 أيضاً لذا فإن X31 = 5.

- هنا تم إشباع احتياجات source ومركز الطلب destination بالكامل لذا نحذف الصف الثالث والعمود الأول لأن عرض = صفر وطلب = صفر على التوالي.

- بعد التعديل نكون الجدول الجديد ثم تكرار الخطوات السابقة على الصفوف والأعمدة المتبقية.

Destination

	1	2	3	4	Supply	Row penalty
1	10	0	20	11	15	11
2	12	7	9	20	25	2
3	0 5	14	16	18	~~5~~ 0	~~5~~ 0
Demand	~~5~~ 0	15	15	10		
Column penalty	-	7	11	9		

جدول (16)

نلاحظ هنا حذفنا العمود الأول والصف الثالث لأن عرض وطلب مساوي إلى صفر، ويبين الجدول (16) مجموعة الفروقات الجديدة لكل من الصف والعمود وهي Max (7, 11, 9, 11, 2)، نلاحظ أن الصف الأول والعمود الثالث تقابل أكبر فرق لذا نختار عشوائياً العمود الثالث فإن أقل كلفة في هذا العمود هو Min (20, 9) أي 9 لذا نستوفي الطلب والذي يساوي 15 من العرض المساوي 25 ليبقى 10 منه أما العمود الثالث فاستوفى كل الطلب وأن X23 تساوي 15 وحدة لذا نحذف العمود الثالث كما هو واضح في الجدول التالي:

Destination

	1	2	3	4	Supply	Row penalty
1	[10]	[0]	[20]	[11]	15	11
2	[12]	[7]	[9] 15	[20]	~~25~~ 10	13
3	[0] 5	[14]	[16]	[18]	5	
Demand	5	15	~~15~~ 0	10	45	
Column penalty	-	7	-	9		

جدول (17)

بعد إيجاد كلف الجزاء نختار أكبر كلفة جزاء والتي تقابل الصـف الثـاني فنختـار أصـغر كلفـة وهي تقابل X22والمساوية إلى C22=7 لذا نشبع كل العرض وقدره 10 لهذه الكلفة فـالعرض يسـتوفي كل احتياجاته ويساوي صفر، أما الطلب في هـذا العمـود الثـاني والطلـب المتبقـي هـو 5 بعـد تعـديل العرض والطلب كما في الجدول التالي:

Destination

	1	2	3	4	Supply	Row penalty
1	[10]	[0]	[20]	[11]	15	11
2	[12]	[7] 10	[9] 15	[20]	25	-
3	[0] 5	[14]	[16]	[18]	~~5~~ 0	-
Demand	5	~~15~~ 5	15	10		
Column penalty	-	0	-	11		

جدول (18)

بعد حذف الصف الثاني لأن العرض يساوي إلى صفر فلم يبقى أمامنا غير العرض الأول لذا نخصص ما لديه لكل من الطلب (2) ومركز الطلب 4 إلى أن يصبح العرض مساوياً إلى صفر وكذلك يتم إشباع كل الطلب لدى المركز 2 و 4، هنا لا داعي من إجراء كلف الجزاء والفروقات لأن المتبقي فقط صف واحد، والجدول التالي يوضح العمل الحسابي.

Destination

	1	2	3	4	Supply
1	[10]	[0] 5	[20]	[11] 10	15
2	[12]	[7] 10	[9] 15	[20]	25
3	[0] 5	[14]	[16]	[18]	5
Demand	5	15	15	10	45

جدول (19)

نلاحظ أن المتغيرات الأساسية هنا في الجدول النهائي هي

X31 = 5 X12 = 5 X22 = 10 X23 = 15 X14 = 10

أما الكلفة الكلية لهذا الجدول هو:

Total cost = 5 x 0 + 5 x 0 + 10 x 7 + 15 x 9 + 10 x 11 = 315

نلاحظ هنا الكلفة الكلية هي 315 أي أصغر من أسلوب أقل الكلف والتي كانت تساوي 335 وكذلك أصغر من الكلفة الكلية في أسلوب الركن الشمال الغربي والمساوية إلى 510.

من الجدير بالذكر هنا أن النتائج والتي يتم الحصول عليها بموجب طريقة فوجل تكون دائماً الأفضل قياساً بالنتائج الأخرى.

مثال (2):

Consider the transportation model in the following table use 1- the least cost method for find starting solution, 2- the vogel's method to find the starting solution.

	1	2	3	Supply
1	$ 0	$ 4	$ 2	8
2	$ 2	$ 3	$ 4	5
3	$ 1	$ 2	$ 0	6
Demand	7	6	6	

جدول (20)

مصفوفة نقل

Solution:

نعيد صياغة الجدول بشكل جدول نقل مناسب ثم نجد مجموع العرض ومجموع الطلب فإذا كان متوازناً تطبق أسلوب أقل الكلف أولاً ثم أسلوب Vogel's ثانياً.

	1	2	3	Supply
1	[0] 7	[4] 1	[2]	8
2	[2]	[3] 5	[4]	5
3	[1]	[2]	[0] 6	6
Demand	7	6	6	19

جدول (21)

$$\sum \text{supply} = \sum \text{demand}$$

$8 + 5 + 6 \quad = \quad 7 + 6 + 6 \;\; = 19$

أسلوب أقل الكلف نختار أصغر كلفة من بين جميع الكلـف الموجـودة فيـتم اسـتيفاء العـرض والطلب لتلك الكلفة وهكذا كما هو موضح في الجدول (21)

$$\text{Total cost} = \sum C_{ij} \quad X_{ij}$$

$$= 7 \times 0 + 1 \times 4 + 5 \times 3 + 6 \times 0 = 4 + 15 = 19$$

تمثل أقل كلفة كلية ممكنة.

2- حل السؤال بطريقة فوجل:

	1	2	3	Supply	Row penalty			
1	[0] 7	[4] 1	[2]	8	[2]	2	[2]	-
2	[2]	[3] 5	[4]	5	1	1	1	1
3	[1]	[2]	[0] 6	6	1	2	-	-
Demand	7	6	6	19				
Column pendility	1	1	2					
	-	1	[2]					
	-	1	-					
Penalty	-	[3]	-					

جدول (22)

Total cost = 7 x 10 + 1 x 4 + 5 x 3 + 6 x 0 = 19

نلاحظ هنا الكلفة هي مساوية إلى الكلفة السابقة، هذا يعني أن أسلوب أقل الكلف في بعض الأحيان أيضاً تكون قريبة من الحل الأمثل.

4-4 تطوير الحل الأساسي Development of the basic solution

في هذا المبحث سوف نتطرق إلى الخطوة الثانيـة Step II والتـي ذكـرت سـابقاً لإيجـاد الحـل الأمثل optimal solution للحل الأساسي الأولي وباستخدام أحد هاتين الطريقتين وهما:

4-4-1 طريقة المسار المتعرج The Stepping stone method

4-4-2 طريقة عوامل الضرب UV multiplier

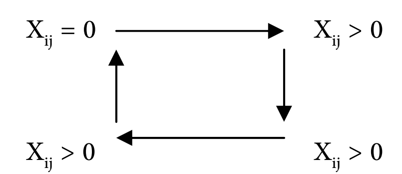
4-4-1 طريقة المسار المتعرج The Stepping stone method

البحث عن الحل الأمثل بعد الحل الأساسي الأولي لمشكلة النقل والتي تم حلها بأحد الطرق الثلاثة السابقة فإن طريقة المسار المتعرج Stepping Stone وهي أحد طرق الاختبار test أي التعقيب عن جميع المتغيرات غير الأساسية لغرض تدقيق إمكانيتها في تحسين الحل باستخدام الكلف كما ذكرنا سابقاً أن جدول النقل قد تم تجزئته إلى مجموعة من الخلايا (المربعات) وخصص متغير لكل خلية (مربع) فإن قسم من هذه المربعات تحمل متغيرات أساسية Basic Variables وهي تلك المتغيرات المشغولة بالكمية المنقولة أما المربعات الفارغة فتتمثل بالمتغيرات الغير أساسية non-basic variables أي قيم Xij مساوي إلى الصفر وأن أسلوب المسار المتعرج هو شبيه بأسلوب البرمجة الخطية المتبع لتحقيق الحل الأمثل باختيار المتغير الداخل من بين المتغيرات الغير أساسية ليحل محل أحد المتغيرات الأساسية والمتمثلة بالمتغير الخارج فهنا نكون مسار مغلق لكل متغير غير أساسي وعليه نطبق هذه الطريقة وفق الخطوات التالية:

1- حل المسألة بأحد الطرق الثلاثة السابقة وهي الركن الشمال الغرب، أقل الكلف، أسلوب فوجل.

2- التأكد أن عدد المتغيرات الأساسية في الحل الأولي الذي تم الحصول عليها بأحد الطرق الثلاثة السابقة يجب أن تساوي $m + n - 1$ حيث m تمثل عدد الصفوف أما n تمثل عدد الأعمدة، فهنا المتغيرات نوعان وهي متغيرات أساسية $X_{ij}>0$ ومتغيرات غير أساسية $X_{ij} = 0$.

3- بعد تجزئة المتغيرات إلى أساسية وغير أساسية، نكون مسار مغلق للمتغيرات الغير أساسية يبدأ وينتهي المسار عند المتغير غير الأساسي المعني وترتبط مجموعة من المتغيرات الأساسية كما يلي:



نلاحظ أن في كل صف أو عمود لا يجوز أن يكون أكثر من متغيرين في عملية الربط، مع ملاحظة يجب أن يتألف المسار المغلق من مجموعة من المستقيمات الأفقية والعمودية بحيث تقع basic variable عند زوايا المسار المغلق ولكن أن يكون المسار باتجاه عقرب الساعة أو عكس عقرب الساعة.

4- هناك شرط أساسي والذي يجب توفره من البداية هو أن الشكل متوازن أي أن العرض = الطلب.

5- نحسب الكلفة الغير مباشرة والمسماة opportunity cost لكل المربعات الفارغة وذلك حسب المسار المغلق المكون للمتغير الواحد نبدأ منه بإشارة موجبة ثم سالبة وهكذا على شرط أن كل صف وعمود يحوي على إشارة موجبة واحدة فقط أو سالبة واحدة فقط ومن هذا يمكن تحديد كل الكلف المعدلة للمتغيرات الغير أساسية.

فإن كانت الكلفة الغير مباشرة $\hat{C}$ ij صفرية وموجبة أي Cij≥0 هذا يعني تحقق الحل الأمثل أما إذا كان Cij<0 سالبة إذا هذا يعني أن الحل غير أمثل لذا يجب تحسين الحل وذلك باختيار أكبر رقم سالب للكلفة غير المباشرة $\hat{C}$ ij فيتم استيفاء العرض أو الطلب لذلك المتغير الغير أساسي والذي يقابل أكبر كلفة غير مباشرة سالبة، فيتكون لديه جدول جديد بالمتغير الداخل الجديد والمتغير الخارج.

6- تكرار الخطوات من 3 – 6 على الجدول الجديد المعدل فإذا كانت كل الكلف الغير مباشرة $\hat{C}$ ij ≥ 0 فإن الحل أمثل أم لا فتكون مسار مغلق للمتغيرات الغير أساسية ونختار المتغير الداخل والخارج.

7- نجد الكلفة الكلية المثلى وذلك:

$$\text{Total cost} = \text{Min} \sum C_{ij} \quad X_{ij}$$

والمثال التالي يوضح العمل الحسابي لأسلوب المسار المتعرج:

مثال (3):

Find the optimal solution for the following transportation cost. Use North-West-Corner-Method for starting solution and stepping stone method for the optimal solution.

destination

		1	2	3	Supply
	1	5	1	8	12
sources	2	2	4	0	14
	3	3	6	7	4
	Demand	9	10	11	30

جدول (23)

مصفوفة الكلف مع العرض والطلب

Solution:

1- يجب أن يكون الشكل متوازن أي أن:

$$\sum S_i = \sum D_j$$

$$12 + 14 + 4 = 9 + 10 + 11 = 30$$

2- حل المسألة باستخدام أسلوب الركن الشمال الغربي كحل أساس أولي وكما هو واضح أدناه:

		1	2	3	Supply
	1	[5] 9	[1] 3	[8] X_{13}	12
Sources	2	[2] X_{21}	[4] 7	[0] 7	14
	3	[3] X_{31}	[6] X_{32}	[7] 4	4
	Demand	9	10	11	30

جدول (24)

Total Cost = $9 \times 5 + 3 \times 1 + 7 \times 4 + 7 \times 0 + 4 \times 7$

$= 104$

3- أما لإيجاد الحل الأمثل

نلاحظ هنا من الجدول أعلاه أن المتغيرات الأساسية basicهي:

X11 X12 X22 X23 X33

وهذه المتغيرات مساوية إلى مجال الحل أي:

$M + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

نبحث الآن عن المتغيرات غير الأساسية non-basic variables وهـي: X32, X31, X21, X13

سنتخذ هذه المتغيرات الغير أساسية على التوالي للتأكد من إمكانيتها على إعطاء نتائج حل أفضـل مـن النتائج المحصلة بأسلوب الركن الشمال الغربي (أي تخفيض الكلفة الإجمالية للنقـل إلى أقـل مـن 104 دينار).

4- نكون مسارات مغلقة ابتداءً من المتغير الغير أساسي مار بمجموعة من المتغـيرات الأساسـية بإشارة موجبة وسالبة وينتهي في المتغير الغير أساسي نفسه وعـلى سـبيل التجربـة لنبـدأ بـالمتغير X13 بجعله متغير أساسي بإدخاله في الجدول النقل، إن عملية إدخاله يعني تكوين مسار مغلق لهذا المتغير يبدأ في X13 وينتهي عند X13 ويعتمد المسار المغلق مع المتغيرات الأساسية فقط بحيث تكـون لـذلك المسار زوايا محددة ذات متغيرات أساسية ويمكن ترك خلايا (القفز عليها) فإن المسار المغلق في المتغـير الغير أساسي X13 هو كما يلي:

$$X_{13}^{+} \rightarrow X_{12}^{-} \rightarrow X_{22}^{+} \rightarrow X_{23}^{-} \rightarrow X_{13}^{+}$$

وهذا المسار موضح في الجدول (25) التالي:

	1	2	3	Supply
1	[5] 9	[1] 3⁻	[8] X^{+}_{13}	12
2	[2]	[4] 7⁺	[0] 7⁻	14
3	[3]	[6]	[7] 4	4
Demand	9	10	11	30

جدول (25)

يبين مسار مغلق

نلاحظ أن في كل صف وعمود هناك إشارتان فقط واحدة موجبة وواحدة سالبة هذا لتحقيق التعادل لأن أي إضافة في الصف من غير طرح هذه الكمية تؤدي إلى زيادة العرض وكذلك الحال بالنسبة إلى العمود هذا يعني عدم توازن المسألة، لذا يجب إضافة وحدة واحدة وضمن المسار الذي يعود لها تطرح من الصف وتضاف إلى العمود وهكذا.

الآن تكون مسارات مغلقة لجميع المتغيرات الغير أساسية بموجب القاعدة أعلاه وكما يلي:

$$X^{+}_{13} \rightarrow X^{-}_{12} \rightarrow X^{+}_{22} \rightarrow X^{-}_{23} \rightarrow X_{13}$$

$$\hat{C}_{13} = 8 - 1 + 4 - 0 = +11$$

$$X^{+}_{21} \rightarrow X^{-}_{22} \rightarrow X^{+}_{12} \rightarrow X^{-}_{11} \rightarrow X_{21}$$

$$\hat{C}_{21} = 2 - 4 + 1 - 5 = -6$$

$$X^{+}_{31} \rightarrow X^{-}_{33} \rightarrow X^{+}_{23} \rightarrow X^{-}_{22} \rightarrow X^{+}_{12} \rightarrow X^{-}_{11} \rightarrow X_{31}$$

$$\hat{C}_{31} = +3 - 7 + 0 - 4 + 1 - 5 = -12$$

$$X^{+}_{32} \rightarrow X^{-}_{33} \rightarrow X^{+}_{23} \rightarrow X^{-}_{22} \rightarrow X_{32}$$

$$\hat{C}_{32} = 6 - 7 + 0 - 4 = -5$$

ومن هذه المسارات المغلقة والمقابلة لها الكلف الغير مباشرة فإن الكلفة الغير مبـاشرة $\hat{C}_{ij}$ إذا

كانت موجبة هذا يعني تؤدي إلى زيادة الكلفة الكلية لمشكلة النقل لكـن الكلفـة $\hat{C}_{ij}$ السـالبة تـؤدي إلى تخفيض الكلفة الكلية للنقل ومنها نستنتج أن أكبر كلفة غير مباشرة سالبة تؤدي إلى أكـبر تخفـيض ممكن في الكلفة الكلية لمشكلة النقل.

فالاختيار يكون على (12-) أكبر رقم سالب فإن المتغير الداخل الجديد من بين المتغيرات الغـير أساسية هو المتغير الذي يقابل أكبر رقم سالب فيكون X31 يسمى بـ entering variables فيجـب أن يقابلها متغير خارج كـما في أسـلوب simplex فـالمتغير الخـارج Leaving variables نختـاره مـن بـين المتغيرات الأساسية basic variables للمسار المغلق للمتغير الداخل فلننظر إلى المسار مرة ثانية:

$$X_{31} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{11}$$

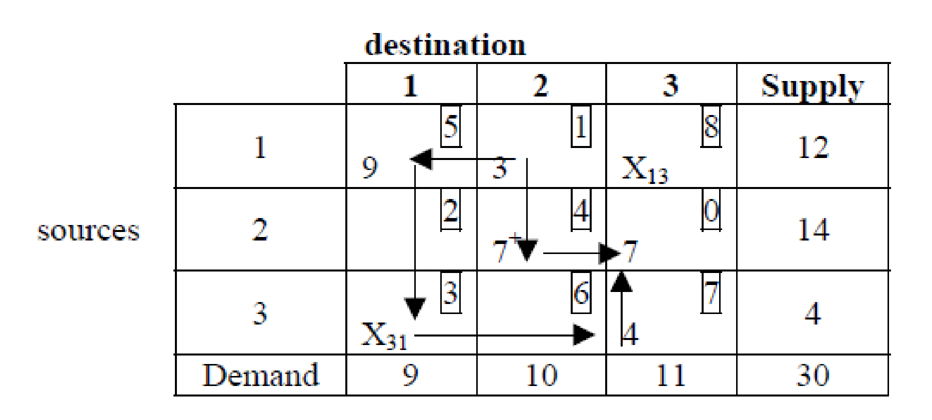
فإن المتغير الخارج يكون من بين المتغيرات الأساسية ذو الإشارة السالبة أي (X33, X22, X11) والتي تقع على زوايا المسار المغلق ذو الإشارة السالبة فـالمتغير الخـارج يكـون هـو المتغـير ذو الكميـة المخصصـة الأقـل (هنـا الشرط مماثـل لشرط البرمجـة الخطيـة لأن يكـون الحـل مجـدياً Feasibility condition) فهنا نلاحظ أن

X33 = 4 X22 = 7 X11 = 9

ويمكن أن توضح كما يلي:

Min (X33 = 4, X23 = 7, X11 = 9) = X33 = 4

أي أن X33 هـو المتغـير الخـارج Leaving V لامتلاكـه أقـل كميـة مخصصـة ومسـاوي إلى 4 وحدات لذا فإن 4 وحدات سوف تخصص إلى المتغير الداخل X31 ويمكن توضـيح هـذا العمـل كـما في الجدول أدناه:



		destination			
		1	2	3	Supply
sources	1	[5] 9	[1] 3	[8] X_{13}	12
	2	[2]	[4] 7	[0] 7	14
	3	[3] X_{31}	[6]	[7] 4	4
	Demand	9	10	11	30

جدول (26)

مسار مغلق للمتغير الداخل

من الجدول أعلاه نلاحظ أن قيمة X31 أصبحت تساوي 4 لذا يجب طرح هذا المقدار من صف ثالث ومن العمود الأول وإضافته في الأماكن التي تحوي على الإشارة الموجبة في جميع الصفوف والأعمدة على التوالي للمحافظة على توازن نلاحظ أن المتغير X33 أصبحت قيمته مساوية إلى صفر أي هو المتغير الخارج، وبعد هذا التعديل يتكون لديه مشكلة نقل جديدة وبالكميات المخصصة الجديدة كما في الجدول أدناه:

	1	2	3	Supply
1	[5] 5	[1] 7	[8]	12
2	[2] X_{21}	[4] 3	[0] 11	14
3	[3] 4	[6]	[7] 0	4
Demand	9	10	11	30

جدول (27)

مصفوفة نقل بعد تعديل

New total cost = $5 \times 5 + 7 \times 1 + 3 \times 4 + 4 \times 3 = 56$

الكلفة السابقة – الكلفة الغير مباشرة للمتغير الداخل × الكمية المنقولة الجديدة.

New total cost = total cost – $\hat{C}_{31}$ (4)

104 – 12(4)

104 – 48 = 56 الكلفة الجديدة

السؤال المطروح الآن هـل هنـاك إمكانيـة الحصـول عـلى نتـائج أفضـل مـن النتيجـة السـابقة والبالغة 56 دينار ولمعرفة الجواب لا بد من اختيار المتغيرات الغير أساسـية للجـدول (27) للتأكـد مـن إمكانية تحسين الحل أي بتكرار الخطوات السابقة على الجدول (27).

فالمتغيرات الغير أساسية non-basic variables هي والكلفة الغـير مبـاشرة $\hat{C}_{ij}$ لهـا موضـحة أدناه:

$$X_{13}^{+} \rightarrow X_{12}^{-} \rightarrow X_{22}^{+} \rightarrow X_{23}^{-} \rightarrow X_{13}$$

$$\hat{C}_{13} = 8 - 1 + 4 - 0 = 11$$

$$X_{21}^{+} \rightarrow X_{22}^{-} \rightarrow X_{12}^{+} \rightarrow X_{11}^{-} \rightarrow X_{21}$$

$$\hat{C}_{21} = 2 - 5 + 1 - 4 = -6$$

$$X_{32}^{+} \rightarrow X_{31}^{-} \rightarrow X_{11}^{+} \rightarrow X_{12}^{-} \rightarrow X_{32}$$

$$\hat{C}_{32} = 6 - 3 + 5 - 1 = +7$$

$$X_{33}^{+} \rightarrow X_{31}^{-} \rightarrow X_{11}^{+} \rightarrow X_{12}^{-} \rightarrow X_{22}^{+} \rightarrow X_{23}^{-} \rightarrow X_{33}$$

$$\hat{C}_{33} = 7 - 3 + 5 - 1 + 4 - 0 = 12$$

نلاحظ هنا فقط X21 يحمل إشارة سالبة أي أن X21 هو المتغير الـداخل entering variable أما المتغير الخارج leaving variable هو:

Min (X_{11} = 5, X_{22} = 3) = X_{22}

فإن المتغير الخارج هو X22 الذي يقابـل أصـغر كميـة منقولـة مخصصـة والبالغـة 3 وحـدات وهذا المقدار يذهب إلى المتغير الداخل X21 ليحل محل قيمة X22، لذا يجب تعـديل قـيم المتغـيرات الأساسية التي تقع عند زوايا المسار المغلق بمقدار 3 وحدات كل حسب الإشارة التي يحملهـا كـما هـو موضح في الجدول (28):

destination

		1	2	3	Supply
sources	1	[5] 2	[1] 10	[8]	12
	2	[2] 3		[0] 11	14
	3	[3] 4	[6]	[7]	4
	Demand	9	10	11	30

جدول (28)

مصفوفة نقل بعد تعديل

New total cost = 2 x 5 + 10 x 1 + 3 x 2 + 4 x 3 = 38

Or

New total cost = 56 – 6(3) = 56 – 18 = 38

هذا يعني أن الكلفـة الإجـمالي انخفضـت بمقـدار 18 وحـدة أي 18 = (3)6– أو يمكـن القـول 56 – 38 = 18

المرحلة الأخيرة يتم اختبار المتغيرات الغير أساسية الناتجة في الجدول (28) لبيان إذا كان الحـل أمثل أو يمكن تحسين الحل مرة ثالثة.

فإن المتغيرات الغير أساسية مع كلفتها الغير مباشرة مبينة أدناه:

$$X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11}$$

$$\hat{C}_{13} = 8 - 0 + 2 - 5 = +5$$

$X_{22} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12}$

$\hat{C}_{22} = 4 - 1 + 5 - 2 = +6$

$X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12}$

$\hat{C}_{32} = 6 - 1 + 5 - 3 = 7$

$X_{33} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{23}$

$\hat{C}_{33} = 7 - 0 + 2 - 3 = +6$

نلاحظ هنـا أن جميـع الكلـف الغـير مبـاشرة $\hat{C}_{ij}$ للمتغـيرات الغـير أساسـية هـي موجبـة أي

$\hat{C}_{ij} \geq 0$

هذا يعني أنها غير مرشحة للدخول إلى الحل كمتغير أساسي لتحسـين قيمـة الكلفـة الإجماليـة لأن زيـادة وحـدة واحـدة لأي متغـير أسـاسي (X13, X22, X22, X33) سـتؤدي إلى زيـادة الكلفـة الإجمالية للنقل ولهـذا تتوقـف عـن ا لحـل وأن الكلفـة النهائيـة والمسـاوية إلى 38 هـي أفضـل كلفـة إجمالية.

يتضح بأن الكلفة الناتجة بموجب الحل الابتـدائي الأسـاسي basic feasible solution لطريقـة الركن الشمال الغربي North west corner والبالغة 104 دينار غير مثلى وبعـد إجـراء الاختبـار الـلازم لتحسين الحل للحصول على كلفة نقل أفضل تمكننا من الحصول على كلفـة إجماليـة قـدرها 38 دينـار باستخدام أسلوب المسار المتعرج Stepping stone method أي تم تخفيض الكلفة الإجماليـة بمقـدار 66 دينار (66 = 38 – 104) ولهذا السبب لا بد من إجراء الاختبارات اللازمة بعد الحصول عـلى الحـل الأساسي الأول لتحسين الحل.

4-4-2 طريقة عوامل الضرب أو المضاعفات Multipliers Method

إن طريقة عوامل الضرب هـي إحـدى الطـرق المتبعـة لتطـوير الحـل الأسـاسي الأولي، وتعتمـد هـذه الطريقـة عـلى أسـاس المتغـيرات الثنائيـة والمبنيـة عـلى أسـاس

النظرية الثنائية Duality Theory حيث تستخدم هذه المتغيرات (الثنائية) لتقييم المربعات غير مشغولة الفارغة، كما سنلاحظ ذلك فإن هذه الطريقة أسهل من طريقة المسار المتعرج Stepping stone method وأكفأ ولها تطبيقات واسعة باستخدام الحاسبات الإلكترونية وبشكل عام فإن الطريقتان المسار المتعرج وطريقة عوامل الضرب تستخدم لاختبار الحل الأساسي Starting basic solution من حيث أمثليته، إلا أن الاختلاف الرئيس بينهما هو في أسلوب اختبار المتغيرات غير الأساسية لمعرفة إمكانيتها على تطوير الحل الابتدائي الأساسي.

أما الخطوات الرئيسية لطريقة عوامل الضرب هي:

1- يخصص لكل صف (i) (sources) من صفوف جدول النقل Transportation table مضاعف Ui.

2- يخصص لكل عمود (j) (Destination) في أعمدة جدول النقل Transportation table، لمضاعف Vj.

3- يخصص لكل متغير أساسي X_{ij} معادلة خطية بدلالة المضاعفات Uiو Vj كالتالي:

$$Cij = Ui + Vj$$

حيث Cij تمثل الكلفة المباشرة من مصدر التجهيز في Sources إلى مركز الطلب (destination) j وكما ذكرنا سابقاً أن عدد المتغيرات الأساسية التي يمكن الحصول عليها من العلاقة التالية: $m + n - 1$ حيث m تمثل عدد الصفوف و n عدد الأعمدة ومن العلاقة أعلاه نحصل على $m + n - 1$ من المعادلات التي تحتوي على $m + n$ من المجاهيل وبحل هذه المعادلات يتم الحصول على قيم هذه المضاعفات multipliers ذلك بافتراض قيمة ابتدائية (عادة نفرض $U1 = 0$) ومنها يمكننا الحصول على قيم بقية المضاعفات باتباع الطرق الرياضية البسيطة المعروفة والتي من خلالها يمكننا الحصول على قيم المتغيرات غير الأساسية X_{pq} وبتطبيق المعادلة التالية:

$$\hat{C}_{pq} = C_{pq} - U_p - V_q \qquad < 0 \qquad - ve$$ (لكل متغير أساسي)

or

$$\hat{C}_{pq} = U_p + V_q - C_{pq} \qquad > 0 \qquad + ve$$

فإن النتائج التي يتم الحصول عليها في هذه المرحلة مشـابهة للنتـائج التـي حصـلنا عليهـا بموجـب طريقة المسار المتعرج، ويمكن التعبير عنها باللغة الإنجليزية كما يلي:

Determination of Entering variable (Method of Multipliers).

The entering variable is determined by using the optimality condition of the simplex method.

The computations of the objective equation coefficients is based on the Primal – dual relationships presented in section (3-3).

We first present the mechanics of the method and then provide a rigorous explanation of the procedure based on duality theory. Another method, called the stepping stone procedure, is also available for determining the entering variable. Although the computations in two methods are exactly equivalent, the stepping. Stone method gives the impression that the procedure is completely unrelated to the simplex method (Look at 4-4-1).

In the method of multipliers we associated the multipliers Ui and Vj with row i and column j of transportation tableau. For each basic variable Xij in the current solution, the multipliers Ui, Vj must satisfy the following equation.

Ui + Vj = Cij (for each basic variable Xij

Those equation yield m + n – 1 equations (because there are only m + n – 1 basic variables) in m + n unknowns. The values of multipliers can be determined from these equation by assuming an arbitrary value for any one of the multipliers (usually U1 is set equal to zero) and then solving the m + n – 1 equations in the remaining m + n – 1 unknown multipliers once this is done, the evaluation of each non basic variable Xpq is given by:

+ ve $\hat{C}$ pq = Up + Vq – Cpq for each non basic variable.

Or

- ve $\hat{C}$ pq = Cpq – Up – Vq

These values will be the same regardless of the arbitrary choice of the value of Ui.

The entering variable is then selected as non basic variable with the most positive Cpq Compare with the minimization optimality condition of the simplex method.

مثال (4):

Find the optimal solution for the following transportation model

destination

		1	2	3	4	Supply
	1	[10] 5	[0] 10	[20]	[11]	15
Sources	2	[12]	[7] 5	[9] 15	[20] 5	25
	3	[0]	[4]	[16]	[18] 5	5
	Demand	5	15	15	10	45

Solution:

Total cost is = 5 x 10 + 5 x 7 + 15 x 9 +5 x 20 + 5 x 18 = 410

نكون معادلات خطية للمتغيرات الأساسية بدلالة المضاعفات وكما يلي:

B. V

X11 : U1 +V1 = 10 = C11

X12 : U1 + V2 = 0 = C12

X22 : U2 + V2 = 7 = C22

X23 : U2 + V3 = 9 = C23

X24 : U2 + V4 = 20 = C24

X34 : U3 + V4 = 18 = C34

نلاحظ هنا عدد المعادلات الخطية مساوية إلى مجال الحل

m + n – 1 و 3 + 4 – 1 = 6

نحل هذه المعادلة لإيجاد قيم Ui و Vj نفرض أن

Let U1 = 0 V1 = 10

U2 = 7 V2 = 0

U3 = 5 V3 = 2

V4 = 13

أما لحساب الكلف الغير مباشرة $\hat{C}pq$ للمتغيرات غير الأساسية non basic variable X_{pq} فيكون كالآتي:

يعد التعويض عن قيم Ui و Vi المحسوبة سابقا نحصل على الكلف الغير مباشرة:

non-basic variable $\hat{C}_{pq}$

X_{13} $\hat{C}_{13} = U_i + V_3 - C_{13}$

$= 0 + 2 - 20 = -18$

X_{14} $\hat{C}_{14} = U_i + V_4 - C_{14}$

$= 0 + 13 - 11 = +2$

X_{21} $\hat{C}_{21} = U_2 + V_1 - C_{21}$

$= 7 + 10 - 12 = +5$

X_{31} $\hat{C}_{31} = U_3 + V_1 - C_{31}$

$= 5 + 10 - 0 = +15$

X_{32} $\hat{C}_{32} = U_3 + V_2 - C_{32}$

$= 5 + 0 - 14 = -9$

X_{33} $\hat{C}_{33} = U_3 + V_3 - C_{33}$

$= 5 + 2 - 16 = -9$

بما أن X_{31} له أكبر معامل موجب ($\hat{C}$ pq) كلفة غير مباشرة لذا فإن X_{31} هو المتغير الداخل entering variable الذي له القابلية لتحسين الحل (الكلفة الإجمالية للنقل).

بعد إيجاد المتغير الداخل X_{31} يجب أن نبحث عن المتغير الخارج Leaving variable فيتم تحديد هذا المتغير بنفس أسلوب طريقة Stepping stone أي تكون مسار مغلق فقط لهذا المتغير الداخل X_{31} نبدأ من X_{31} وينتهي بـ X_{31} وكما يلي:

$$X_{31}^{+} \rightarrow X_{34}^{-} \rightarrow X_{24}^{+} \rightarrow X_{22}^{-} \rightarrow X_{12}^{+} \rightarrow X_{11}^{-} \rightarrow X_{31}$$

$$\hat{C}_{31} = 0 - 18 + 20 - 7 + 0 - 10 = 15$$

وهذه نفس الكلفة الغير مباشر التي تم احتسابها سابقاً.

الآن من هو المتغير الخارج Leaving variable

$$\text{Min } (X_{34} = 5 \quad , \quad X_{22} = 5 \quad , \quad X_{11} = 5) = 5$$

بما أن كل من X34, X22, X11 تقابل نفس القيمة لذا يمكن اعتبار أحدهم هو المتغير الخارج لنفرض أن X34 هو المتغير الخارج هذا يعني أن أي زيادة في X31 تؤدي إلى تقليص قيم كل من x34, X22, X11 فهذا يعني أن X31 تزداد من صفر إلى 5 أما قيم الزوايا للمتغيرات الأساسية تعدل على هذا الأساس وكما هو واضح في الجدول التالي:

Destination

		1	2	3	4	Supply
sources	1	10 5-5	0 10+5	20	11	15
	2	12	7 5-5	9 15	20 5+5	25
	3	0 X_{31}=5	14	16	18 5-5	5
	Demand	5	15	15	10	45

جدول (30)

وبعد تعديل قيم المتغيرات الأساسية ومن ضمنها X31 نحصل على ما يلي:

Destination

	1	**2**	**3**	**4**	**Supply**
1	10	0 15	20	11 X_{14}	15
2	12	7 0	9 15	20 10	25
3	0 5	14	16	18	5
Demand	5	15	15	10	45

جدول (31)

أما الكلفة الكلية لهذا الجدول تكون:

0x10 + 15 x 0 + 15 x 9 + 10 x 2 + 5 x 0 = 335

وهذه الكفة مختلفة عن الكلفة للحل الأساسي الأولي والمساوية إلى 410 دينار (= 335 – 410 (75$

فـإن 75$ هـي مسـاوية إلى عـدد الوحـدات المنقولـة الجديـدة مـن X31 والمسـاوية إلى 5 والمضروبة بالكلفة الغير مباشرة

$\hat{C}_{31} = \$15$

$15 \times 5 = 75\$$

نلاحظ هنا الحل من جدول (31) هو في وضع الإحلال لأن عدد المتغيرات الأساسـية لا تسـاوي مجال الحل وبما أن X_{22} و X_{21} هي صفر. لذا الجدول الأخير بحاجة إلى معاملة خاصة هذا يعني يجب أن تعامل أحد المتغيرات الغير أساسية على أساس أنها متغيرات أساسية موجبة.

(Degneracy, however, needs no special provisions, and the zero basic variables are treated as any other positive basic variables).

نجـد الآن الجـدول الجديـد للمتغـيرات الغـير أساسـية وذلـك بإيجـاد معـادلات بدلالـة (Multipliers Ui , Vj) ثم حساب قيمهم ومن ثـم حسـاب قيمـة الكلـف الغـير مبـاشرة للمتغـيرات الأساسية كما يلي باعتبار أن كل من X_{22} , X_{21} متغيرات أساسية:

Basic variable	U , V equation	Solution	
X_{12}	$U_1 + V_2 = 0$	$U_1 = 0$	$V_2 = 0$
X_{21}	$U_2 + V_1 = 12$	$U_2 = 7$	$V_1 = 5$
X_{22}	$U_2 + V_2 = 7$	$V_2 = 0$	$U_2 = 7$
X_{23}	$U_2 + V_3 = 9$	$U_2 = 7$	$V_3 = 2$
X_{24}	$U_2 + V_4 = 20$	$U_2 = 7$	$V_4 = 13$
X_{31}	$U_3 + V_1 = 0$	$V_1 = 5$	$U_3 = -5$

بعد إيجاد جميع قيم Ui , Vj نستخدمهم لإيجاد الكلفة $\hat{C}_{pq}$ للمتغيرات الغير أساسـية -non basic variables كما يلي:

Non-basic variable	$U_i + V_j - C_{ij}$
X_{13}	$U_1 + V_3 - C_{13} = 0 + 2 - 20 = -18$
X_{14}	$U_1 + V_4 - C_{14} = 0 + 13 - 11 = +2$
X_{11}	$U_1 + V_1 - C_{11} = 0 + 5 - 10 = -5$
X_{32}	$U_3 + V_2 - C_{32} = -5 + 0 - 14 = -19$
X_{33}	$U_3 + V_3 - C_{33} = -5 + 2 - 16 = -19$
X_{34}	$U_3 + V_4 - C_{34} = -5 + 13 - 18 = -10$

ومن الجدول أعلاه نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_{14} والذي يقابل أكبر $\hat{C}_{pq}$ والمساوية إلى 2+

وبعمل مسار مغلق لهذا المتغير فيكون:

$$X_{14}^{+} \rightarrow X_{24}^{-} \rightarrow X_{22}^{+} \rightarrow X_{12}^{-}$$

$$\hat{C}_{14} = 11 - 20 + 7 - 0 = -2$$

فإن المتغير الخارج هو ذلك المتغير الذي يقابل أصغر كمية منقولة من المتغـيرات ذات الإشـارة السالبة:

$$\text{Min } (X_{24} = 10 , X_{12} = 15) = X_{24} = 10$$

فإن Leaving variable هو X_{24} وكما هو واضح في جدول (31) وبعد إجـراء التعـديلات عـلى المتغيرات الأساسية فيكون الجدول التالي:

Destination

		1	2	3	4	Supply
sources	1	[10]	[0] 5	[20]	[11] 10	15
	2	[12]	[7] 10	[9] 15	[20]	25
	3	[0] 5	[14]	[16]	[18]	5
	Demand	5	15	15	10	45

جدول (32)

والكلفة الكلية لهذا الجدول هي:

$$\text{Total cost} = 5 \times 0 + 10 \times 11 + 10 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 0$$

$$= 315\$$$

هذا يعني أن الكلفة الكلية انخفضت من (315 – 335) أي إلى 20$ كان مقدار التخفيض. أي بمقدار $X_{14} = 10$ من الكلف الغير مباشرة وهي (2) والمساوية إلى 2 × 10.

والآن اختبر هل جميع المتغير non-basic بتكرار العمليات السابقة للوصول إلى الحل الأمثل هذا يترك للطالب للعمل عليه.

4-5 العلاقة بين طريقتي المضاعفات والبرمجة المبسطة:

Relation shipe between the Method of Multipliers and simplex method

تطرقنا سابقاً العلاقة ما بين المسائل الأولية – والثنائية (Primal – dual problem) حيث تشير الخاصية الثنائية إلى إمكانية الحصول على معاملات دالة الهدف بإيجاد الفرق بين الجانب الأيمن والأيسر لقيود المسألة (dual-constraint problem) وبالاعتماد على هذه الخاصية من توضيح العلاقة بين طريقة المضاعفات وطريقة البرمجة الخطية فإن المضاعفات U_i و V_j تمثل متغيرات dual فيمكن صياغة المشكلة الثنائية لنماذج النقل لو فرضنا أن هناك مصدرين للتجهيز m = 2 وثلاث مراكز للطلب (n = 3) فإن المتغيرات الثنائية dual variable لمصادر التجهيز هي U_1 , U_2 ولمراكز الطلب هي V_1 , V_2 , V_3 إذن يمكننا صياغة المشكلة الثنائية لنموذج النقل كالآتي:

(Constraints for sources U_1 , U_2 destinations are V_1 , V_2 , V_3) the dual problem becomes.

Maximize $$W = (a_1 U_1 + a_2 U_2) + (b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3)$$

Subject to:

$$\begin{array}{lllllll}
U_1 + V_1 & & & & \leq C_{11} \\
U_1 & & + V_2 & & & \leq C_{12} \\
U_1 & & & + V_3 & & \leq C_{13} \\
& U_2 + V_1 & & & \leq C_{21} \\
& U_2 & + V_2 & & & \leq C_{22} \\
& U_2 & & + V_3 & & \leq C_{23} \\
& U_1 , U_2 , V_1 , V_2 , V_3 & & & & \text{unrestricted}
\end{array}$$

حيث:

sources i مقدار العرض لدى المصدر = a_i

j destination الطلب لدى مراكز الطلب = b_j

j كلفة ما بين المصدر i ومركز الطلب = C_{ij}

sources I المتغير المقابل Dual variable للقيود المقابلة لـ = U_i

destination j المتغير المقابل Dual variable للقيد المقابل لـ = V_j

هذا المضاعفات U_i , V_j غير مقيدة بالإشارة بسبب القيود في المسألة الرئيسة عبارة عن متساويات والجدول التالي يبين وضع المسألة أعلاه:

	Sources 1 variable			Sources 2 variable			
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	R.H.S
Sources Constraint	1	1	1				a_1
				1	1	1	a_2
Destination Constraint	1			1			b_1
		1			1		b_2
			1			1	b_3
Objective equation	$-C_{11}$	$-C_{12}$	$-C_{13}$	$-C_{21}$	$-C_{22}$	$-C_{23}$	0

جدول (33) مشكلة نقل بأسلوب Simplex

ومن هذا نلاحظ أنه يمكن صياغة المشكلة الثنائية للنقل بشكل عام كالآتي:

Maximize $$W = \sum_{i=1}^{m} a_i U_i + \sum_{j=1}^{m} b_j V_j$$

Subject to:

$U_i + V_j \leq C_{ij}$ for all i and j

U_i , V_j unvestricted

ويمكن الحصول على معاملات دالة الهـدف وذلـك بتعـويض قـيم المتغـيرات الثنائيـة في قيـود المشكلة الثانية Dual ثم إيجاد الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر لهذه القيود.

Objective equation coefficient are obtained by taking the difference between the left and the right sides of the dual constraints.

وأن نماذج النقل هي نماذج تبحث عن تخفيض كلفة النقل إلى أقل مـا يمكـن لـذا فـإن المتغـير الداخل هو المتغير الذي له أكبر قيمة موجبة للمعادلة التالية:

$U_p + V_p - C_{pq}$

إن الشرط المتمثـل بالمعادلـة أعـلاه مشـابهة لـلشرط المعتمـد في طريقتـي المسـار المتعـرج والمضاعفات حيث أن المتغير الداخل هو المتغير الذي يحمل أكبر قيمة موجبة للمعادلة التالية:

$$\hat{C}_{pq} = U_p + V_p - C_{pq}$$

فإن العلاقة ما بين طريقـة المضـاعفات Multipliers وطريقـة simplex الآن يجـب أن تكـون واضحة.

فإن الحل الأمثل إذا كانت المضاعفات تعطى القيمة المثلى الثنائية (optimum dual values) مباشرةً وحسب القاعدة السابقة أن الحل الأمثل يجـب أن يكـون متسـاوي لدالـة الهـدف في الحـالتين Promal و Dual. ومن صفحة رقم (199) نلاحظ أن:

$U_1 = 0 \quad U_2 = 7 \quad U_3 = -5$

$V_1 = 5 \quad V_2 = 0 \quad V_3 = 2 \quad V_4 = 13$

فإن دالة الهدف المقابلة هي دالة كما يلي:

Dual O.F.:

Maximize $W = \sum_{i=1}^{3} a_i U_i + \sum_{j=1}^{4} b_j V_j$

$= (15 \times 0 + 25 \times 7 + 5 \times -5)$

$+ (5 \times 5 + 15 \times 0 + 15 \times 2 + 10 \times 11)$

$= 315$

وهذه هي نفس الكلفة السابقة والمحسوبة للمثال السابق التـي تـم الحصـول عليهـا بموجـب طريقة المضاعفات.

4-6 نماذج النقل البيني The Trans-shipment:

تبرز الحاجة إلى مثل هذا النوع من نماذج النقل عندما تكون طريقة النقل المباشرة من مصدر التجهيز إلى مراكز الطلب غير اقتصادية، ولربما من المفيـد أن تمـر البضـاعة بعـدة مصـادر sources أو مراكز الطلب destination قبل وصولها إلى هدفها النهائي أو مركز الطلب الأخير لها. إن مشاكل النقل في هذا النوع تدعى Transshipment.

إن أساليب النقل السابقة لا يمكن معالجة هذا النوع من مسائل النقل مباشرة بـل تحتـاج إلى إجراء بعض التعديلات الطفيفة على المشكلة قبل أن تتمكن من استخدام أساليب النقل السابقة. ومن هذه المشكلات مشكلة عدم التوازن unbalance problem فإذا لم يتساوى العرض مع الطلـب فيقـال أن المشكلة غير متوازنة، وقد نلاحظ ما يلي:

أولاً- العرض أكبر من الطلب:

إذا كـان العـرض أكـبر مـن الطلـب أي أن $\sum a_i > \sum b_j$ ويجـب موازنـة المشـكلة قبـل استخراج الحل الأساسي الأولي ثم الحل الأمثل نفـترض وجـود نهايـة (مركـز طلـب) (artificial) وهـي تستوعب الفارق من الوحدات بين العرض والطلب وبما أنـه لا يـتم نقـل بضـائع فعليـة عـبر مربعـات النهاية الوهمية destination فإن تكاليف النقل في تلك المربعات ستكون مساوية إلى الصفر لذا هـذا العمود الوهمي من مراكز الطلب يسـمى مركـز الطلـب الـوهمي والـذي يمثـل بــDumny variable ويرمز له D فإن إضافة هذا العمود الوهمي يعيد التوازن إلى المشكلة.

مثال (5):

Find the starting solution for the following transporation problem by any method:

		Destination			
		1	2	3	Supply
sources	1	2	1	2	20
	2	1	2	3	9
	3	4	2	1	11
	Demand	10	8	15	

جدول (34) مشكلة نقل غير متوازنة

Solution:

$$\sum a_i = 20 + 9 + 11 = 40$$

$$\sum b_j = 10 + 8 + 15 = 33$$

هنا $\sum a_i$ أكبر من $\sum b_j$

المشكلة غير متوازنة لذا نحتاج إلى مركز وهمي تستوعب الفارق من الوحدات بين مجموع العرض ومجموع الطلب أي وحدات:

$$\sum a_i - \sum b_j = 40 - 33 = 7 \quad \text{وحدات}$$

لذا نضيف عمود وهمي على جدول الكلف السابقة وبكلفة مساوية إلى الصفر مقابل كل مصدر كما يلي:

		1	2	3	Dumy	a_i
sources	1	10 [2]	8 [1]	2 [2]	[0]	~~20~~ ~~10~~ ~~8~~ 0
	2	[1]	[2]	9 [3]	[0]	~~9~~ 0
	3	[4]	[2]	4 [1]	7 [0]	~~11~~ ~~7~~ 0
	b_j	~~10~~ 0	~~8~~ 0	~~15~~ ~~13~~ ~~4~~ 0	~~7~~ 0	40

جدول (35)

والآن يمكن استخدام أي أسلوب لحل هذه المشكلة ثم استخدام أسلوب الركن أثناء الغرب وكما هو واضح أعلاه والكلفة الكلية هي:

$$T.C = 10 \times 2 + 8 \times 1 + 2 \times 2 + 9 \times 3 + 4 \times 1 + 7 \times 0$$

$$= 63$$

فهنا 7 لا تعتبر مصدر تجهيز وإنما يتم إرجاع البضاعة غير المستغلة إلى المصدر أو المصنع.

ثانياً- الطلب أكبر من العرض Demand > Supply:

هنا العرض أقل من الطلب ولأجل جعل المشكلة متوازنة لغرض استخراج الحل نفترض وجود مصدر sources وهمي أما مقدار العرض لهذا الصف الوهمي Dumy Row يمثل الفرق ما بين $\sum b_j - \sum a_i$ وبما أن مجموع العرض لا يكفي لسد الاحتياجات لذا فإن تكاليف النقل من مربعات المقابلة لمراكز الطلب destination تساوي صفراً وكما هو موضح في المثال التالي:

مثال (6):

Using least-cost method to solve the following transportation problem:

		Destination			
		1	2	3	Supply
	1	8	7	2	100
	2	4	9	10	75
sources	3	1	2	8	25
	4	5	6	11	125
	Demand	150	125	130	

جدول (36)

شكل نقل غير متوازنة

Solution:

$$\sum a_i = 200 + 75 + 25 + 125 = 325$$

$$\sum b_j = 150 + 125 + 130 = 405$$

هنا نحتاج إلى إضافة صـف وهمـي Dumy Row مصـدر وهمـي وبكلفـة مسـاوية إلى صـفر مقابل كل مركز طلب أما مقدار العرض فيه يساوي:

$$\sum b_j - \sum a_i = 405 - 325 = 80$$

والجدول يصبح كما يلي بعد حله بأسلوب أقل الكلف:

		1	2	3	a_i
	1	[8]	[7]	100 [2]	100 0
	2	45 [4]	[9]	30 [10]	75 30
	3	25 [1]	[2]	[8]	25 0
sources	4	[5]	125 [6]	[11]	125 0
	dumy	80 [0]	[0]	[0]	80 0
	b_j	150, 70, 45, 0	125, 0	130, 3, 0	405

جدول (37)

$$T.C = 45 \times 4 + 100 \times 2 + 30 \times 10 + 125 \times 6 + 80 \times 0 + 25 \times 1$$

$$= 180 + 200 + 300 + 750 + 23$$

$$= 1445$$

ملاحظة: إن الصف الوهمي Dumy Row أو العمود الوهمي Dumy Column هي مشـابه للمتغيرات الاصطناعية artificial variable مـن مشـكلات البرمجـة الخطيـة Linear programming التي سبق ذكره.

4-6 نماذج التخصيص The Assignment Model:

The assignment model deals with a special class of linear – programming problems in which the objective is to assign a number of "origins" to the same number of "destionation" at minimum total cost. The assignment is to be made on one to one basis. That is, each origin (Job) can associate with one and only destination machines. This feature implies the existence of two specific characteristics in a linear programming problem which, when present, give rise to an assignment problem. First, the pay off matrix for the given problem is a square matrix. Second, the optimal solution or (any solution with in the given constraints) for the problem is such that there can be one and only one assignment in a given row or column of the given payoff matrix.

Payoff measures for each assignment are assumed to be know and independent of each other. With information a bout the number of origins and destinations and the payoff measure associated with each available assignment, the assignment model is used to choose that strategy which maximizes or minimizes the total payoff measure, depending upon whether the particular payoff represents again or loss to the decision maker.

Consider the situation of assignment m jobs (or workers) to n machines.

A job (i = 1 , 2 … m) when assigned to machine (j = 1 , 2 … n) incurs a cost C_{ij} . The objective is to assign the jobs to the machines (one job per machine) at the least total cost. The situation is known as the assignment problem.

The general assignment model with n workers and n jobs is represented in table (38).

هناك نوع آخر من تطبيقات نماذج النقل Transportation Model هو توزيع m من العمال workers على مجموعة من المكائن عددها n jobs تتطلب عملية توزيع هذه كلف مساوية إلى C_{ij}. إن الهدف لمثل هذا النوع من مسائل النقل هو توزيع مجموعة العمال إلى مجموعة المكائن بحيث تكون الكلفة الإجمالية أقل ما يمكن.

إن العمال (الأعمال) تمثل هنا مصادر التجهيز sources والمكائن job تمثل مراكز الطلب destination والعرض المتوفر لكل مصدر من مصادر التجهيزm … , 2 , 1 = i يساوي وحدة واحدة أي أن $a_i = 1$ (i = 1 , 2 … m)

وكذلك الطلب لكل مركز في job يساوي وحدة واحدة أيضاً أي أن:

$b_j = 1 , (j = 1 , 2 \dots n)$

علماً بأن كلفة تخصيص عمل i (workers) إلى الماكنة job j هي عبارة عن C_{ij} وفي حالة عـدم إمكانية تخصيص عمل إلى أي ماكنة تكون الكلفة مساوية إلى m حيث أن m عبارة عن كلفـة عقديـة كبيرة جداً.

الجدول التالي (38) يبين الشكل العام لنموذج التخصيـص لــn مـن workers إلى n مـن jobs باعتبار أن m = n مكائن (machines) jobs

		1	2	3	…	n	Supply
Worker	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	..	C_{1n}	1
(عمال)	2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	…	C_{n}	1
	3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	…	C_{3n}	1
	.	.				.	.
	.	.				.	.
	.	.				.	.
	n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	…	C_{nn}	1
	Demand	1	1	1	…	1	

جدول (38)

شكل عام لنموذج التخصيص

The element C_{ij} represents the cost of assiging worker i to job j (i , j = 1 , 2 … n). There is no loss of generality in assuming that the number of workers always equals to the number of jobs because we can always add fictions workers or fictions jobs to effect this result.

إن شرط التوازن الأساسي في نماذج النقل السابقة يجب توفره أيضاً في نماذج تخصـيص الأعـمال حيث ينبغي أن يتبادل العرض المتوفر من قبل مصادر التجهيـز (workers) مـع مجموعـة احتياجـات مراكز الطلب (jobs) ففي حالة عدم تحقيق التوازن يتم إضافة مصدر تجهيز worker أو مركز طلـب job وهمي Dumny وذلك حسب طبيعة المشكلة لغرض إعادة التوازن إلى جدول التخصيص وبكلفـة مساوية إلى صفر.

4-8 طرق حل مشاكل التخصيص Solution of assignment probles:

4-8-1 الطريقة الهنكارية The Hungarian method:

تعتمد هذه الطريقة على فكرة تخفيض المصفوفة الخاصة بالبيانات المتعلقة بالمشكلة، أما خطوات حل هذه المشكلة تعتمد على الخطوات التالية:

Step 1: For the original cost matrix, identify each row's minimum, and subtract it from all entries of the row.

الخطوة 1: في مصفوفة كلف التخصيص الأصلية cost matrix، إيجاد أقل كلفة في كل صف من صفوف المصفوفة ومن ثم طرح هذه القيمة من القيم المناظرة لكل صف.

Step 2: For the matrix resulting from step 1, identify each column's minimum, and subtract it from all entries of the column.

الخطوة 2: من المصفوفة الناتجة من خطوة (1) أوجد أقل قيمة في كل عمود من أعمدة المصفوفة ومن ثم طرح هذه القيمة من كل قيم ذلك العمود، وهذه المصفوفة الناتجة تسمى بمصفوفة الفرص الكلية (opportunity cost).

Step 3: Identify the optimal solution as the feasible assignment associated with the zero elements of the matrix obtained in step 2.

الخطوة 3: نعرف الحل الأمثل بدلالة مجال الحل الناتجة من عدد أصفار المصفوفة والحاصلة من الخطوة 2 فيجب أن تساوي مجال الحل فعندها نقول أن الحل أمثل حيث تم تخصيص عمل واحد worker لكل job من كل صف وعمود.

مثال (6):

Joe Klyne's three children-joh, Kaven, and Terri – want to earn some money to take care for personal expense during a school trip to the local Zoo. Mr Klyne has chosen three chores for his children: Moving the Lawn, paintiny the grage, and washing the family cars. To avoid auticipated sibling competition, he asked them to submit (secret) bids for what they feel was afair pay for each of the three chores. The understanding then was that all three children will abide by their fathers decision as to who gets which chore. Table (39) Summarizes the abids received.

	Mow	Paint	Wash
John	$15	$10	$9
Karen	$9	$15	$10
Terri	$10	$12	$8

جدول (39)

مشكلة تخصيص

Based on this information, how should Mr Klyne assign chores?

Solution:

نفرض أن:

p_i تمثل أقل كلفة في كل صف

q_i أقل كلفة في كل عمود (كما موضحة في خطوة (1) وخطوة (2)

بعد اختيار أصغر كلفة من كل صف وعمود كما هو واضح في الجدول أدناه:

	Mow	Paint	Wash	Row minimum
John	15	10	9	$P_1 = 9$
Karen	9	15	10	$P_2 = 9$
Terri	10	12	8	$P_3 = 8$

جدول (40)

بعد استخدام خطوة واحد بطرح قيم P_i من كل صف ينتج الجدول التالي:

	Mow	Paint	Wash
John	6	1	0
Karen	0	6	0
Terri	2	4	0
Column minimum	$q_1 = 0$	$q_2 = 1$	$q_3 = 0$

جدول (41)

الآن نختار من كل عمود أصغر رقم ممكن كما هو واضح من الجدول قيتم طـرح هـذا الـرقم من كل عمود كما هو واضح من الجدول أدناه:

	Mow	Paint	Wash
John	6	0	0
Karen	0	5	1
Terri	2	3	0

جدول (42)

المصفوفة المخصصة النهائية

هذا يمثل الحل الأمثل لأن كل عمود يحوي على الأقل صفر واحد بحيث أن الاختيـار يكـون في كل عمود صفر كما هو واضح من الأصفار التي تحتها خط لا يجوز اختيار صفرين من نفس الصف أو العمود هذا يعني تحقق مجال الحل feasability فإن Karen يخصص إلى Mow و John يخصص إلى Paint و Terri يخصص إلى Wash فإن الكلفة الكلية إلى Mr Klyne هي تمثل الأصفار المقابلـة لكـل كلفة مباشرة من جدول الكلف، أي:

$9 + 10 + 8 = 27$

تمثل أقل كلفة ممكن الحصول عليها وهذه الكلفة متماثلة إلى جميع القيم:

$p_i + q_j = (0 + 1 + 0) + (9 + 9 + 8) = \$27$

ملاحظة:

في حالة إذا كان مجال الحل لا يساوي الحل الأمثل نتبع الخطوة التالية:

Step 4: If no feasible solution (with all zero entries) can be secured from step 1 and 2:

(i) Draw the minimum number of horizantal and vertical lines in the last reduced matrix that will cover all the zero entries.

(ii) Select the smallest uncovered element, subtract it from every uncoverd element, and then added it to every element at the intersection of two lines.

(iii) If no feasible assignment can be found among the resulting zero entries, repeat step 4 other wise go to step 3 to determine the optimal solution.

مثال (7):

Suppose that the situation descussed in (example 6) is extended to four children and four chores the following table sumarizes the elements of problem.

		chove			
		1	2	3	4
Child	1	\$1	\$4	\$6	\$3
	2	\$9	\$7	\$10	\$9
	3	\$4	\$5	\$11	\$7
	4	\$8	\$7	\$8	\$5

جدول (43)

مصفوفة تخصيص (جدول كلف)

Solution:

($p_1 = 1$ $\quad p_2 = 7$ $\quad p_3 = 4$ $\quad p_4 = 5$)

كلفة الصفوفة من خطوة (1):

($q_1 = 0$ $\quad q_2 = 0$ $\quad q_3 = 3$ $\quad q_4 = 0$)

كلفة العمود:

بعد طرح كلف الصف والعمود نحصل على مصفوفة التخصيص الجديدة كما في الجداول التالية:

	1	2	3	4	Row minimum
1	0	3	5	2	$P_1 = 1$
2	2	0	3	2	$P_2 = 7$
3	0	1	7	3	$P_3 = 4$
4	3	2	3	0	$P_4 = 5$
Column minimum	$q_1 = 0$	$q_2 = 0$	$q_3 = 3$	$q_4 = 0$	

جدول (44)

		chore			
		1	2	3	4
Child	1	0	3	2	2
	2	2	0	0	2
	3	0	1	4	3
	4	3	2	0	0

جدول (45)

الأعمدة والصفوف المغطاة بقطع المستقيمات

بعد تغطية هذه الأصفار الناتجة من خطوة 1 وخطوة 2 نبدأ من الصف أو العمود الذي يحوي أكبر عدد من zero.

نلاحظ من الجدول أعلاه العمود الأول وصف 2 ، 4 المغطاة بقطع المستقيم ولكن هنا مجال الحل يساوي إلى 4 = n وعدد قطع المستقيمات لا تساوي إلى أربعة لذا نحسن الحل كما ذكرنا في خطوة (4) وذلك أ- اختيار أصغر رقم ممكن من بين الأرقام الغير مغطاة، ثم يطرح من جميع الأرقام الغير مغطاة ويضاف على جميع القيم عند تقاطع خطين. كل القيم الأخرى تظل كما هي. ب- إذا كان الحل غير أمثل ارجع إلى الخطوة (4) إلى أن يصبح عدد الخطوط مساوية إلى مجال الحل.

وبالعودة إلى مثال:

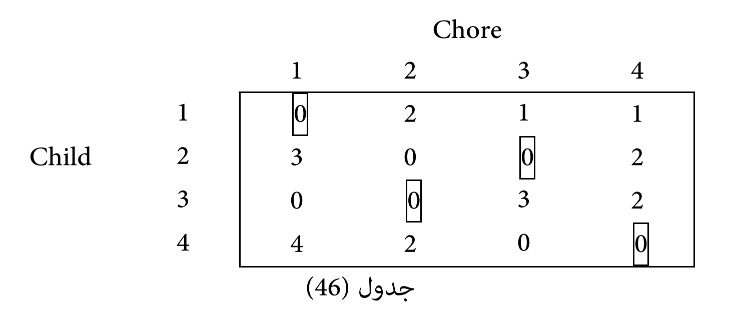
أولاً: نختار أصغر رقم من بين الأرقام الغير مغطاة بقطع المستقيم، جدول (45) نختار الرقم 1 ليكن أصغر رقم ممكن.

ثانياً: نطرح هذا الرقم من بقية الأرقام الغير مغطاة كما هي واضحة في جدول (46).

ثالثاً: يضاف هذا الرقم المختار من خطوة 1 على جميع القيم التي تقع عند تقاطع خطين، أما القيم الباقية تبقى كما هي.

رابعاً: نبدأ بتغطية أكبر عدد ممكن من الأصفار سواءً بالعمود أو الصف فإذا كان الحل غير أمثل كرر الخطوات من 1-4 على الجدول الجديد إلى أن تصل إلى الحل الأمثل أي عدد قطع المستقيم مساوية إلى مجال الحل أي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة (n).

وبتطبيق الخطوات الأربعة السابقة على جدول رقم (45) نحصل على جدول جديد لمصفوفة الكلف والمسماة بـapportunity cost وهذه واضحة في جدول(46):



		Chore 1	2	3	4
Child	1	$\boxed{0}$	2	1	1
	2	3	0	$\boxed{0}$	2
	3	0	$\boxed{0}$	3	2
	4	4	2	0	$\boxed{0}$

جدول (46)

الحل الأمثل لمشكلة التخصيص

والجدول أعلاه يبين تخصيص الطفل الأول على (1) chore و طفل ثاني عـلى (3) chore طفـل ثالث على (2) chore و طفل رابع على (4) chore فإن الكلف الإجمالية المقابلة لهذا التخصيص هي:

$1 + 10 + 5 + 5 = \$21$

ملاحظة: إن المربعات $\boxed{0}$ ذو القيمة الصفرية تعني المتغيرات الأساسية في شكل التخصيص.

4-8-2 طريقة البرمجة الخطية (لتوضيح الطريقة الهنكارية):

Simplex Explanation of Hungarian Method

يمكن صياغة مشكلة التخصيص رياضياً أي بشكل برمجة خطية Linear programming كما يلي:

لنفرض أن X_{ij} تساوي واحد في حالة تخصيص العمل i إلى الماكنـة j وتسـاوي صـفر في حالـة عـدم التخصيص. أي كما يلي:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if worker i is assigned to job j} \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

C_{ij} تمثل كلفة التخصيص من worker i إلى job j

وبما أن الهدف من دراسة مشكلة التخصيص هو تقليل الكلفة إلى أدنا مـا يمكـن إذن البرمجـة الخطية للمشكلة تكون كالآتي:

$$\text{Minimize } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \qquad i = 1 \;,\; 2 \;\ldots,\; n$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \qquad j = 1 \;,\; 2 \;\ldots,\; n$$

$$X_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad X_{ij} = 1$$

فإن إضافة أي كمية ثابتة أو طرحها من أي صف أو عمود لمصفوفة الكلف (C_{ij}) لا تؤثر على الحل الأمثل تبقى كما هي، وهذا واضح إذا كانت p_i و q_j هما ثوابت طرحت من الصفوف i والأعمدة j فإن عناصر الكلف C_{ij} تغيرت إلى:

$$\hat{C}_{ij} = C_{ij} - p_i - q_j$$

ولهذا يمكن إعادة صياغة نموذج التخصيص كالآتي:

$$\text{Minimize } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{C}_{ij} X_{ij}$$

or

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (C_{ij} - p_i - q_j) \; X_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} - \sum_{i} p_i (\sum_{j} X_{ij}) - \sum_{j} q_j (\sum_{i} X_{ij})$$

$$= \sum \sum C_{ij} X_{ij} - \sum p_i (1) - \sum q_j (1)$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} C_{ij} X_{ij} \text{ - Constant}$$

فهنا دالة الهدف اختلفت عن السابق فقط بالكمية الثابتة فإن القيم المثلى لـX_{ij} تبقى كما هي في الحالتين ومنها يمكن أن نطرح أصغر عنصر لكل صف وعمود من جدول الكلف من بقية عناصر ذلك الصف (العمود) وبهذا نحصل على جدول كلفة جديد كما وضحناها في المثالين السابقين.

أسئلة الفصل الرابع

1- Find the starting Basic solution for the following transporation cost by using north-west corner and least cost:

		destination			
		1	2	3	supply
Source	1	0	2	1	5
	2	2	1	5	10
	3	2	4	3	5
Demand		5	5	10	

2- In the transportation problem given below:

the total demand exceeds total supply. Suppose that the penatly costs per unit of unsatisfied demand are 5, 3 and 2 for destination 1 , 2 and 3. Find the optimal solution.

		destination			
		1	2	3	supply
Source	1	5	1	7	10
	2	6	4	6	80
	3	3	2	5	15
Demand		75	20	50	

3- From the following starting basic feasible solution of transportation problem find the optimal solution:

				S
	[1]	[2] 10	[6] 2	12
	[0] 9	[4]	[2] 5	14
	[3]	[6]	[7] 4	4
D	9	10	11	

4- Consider the following initial basic feasible solution determined by the north-west-corner:

To / From	1	2	3	Origin supply
A	2000 [7]	[6]	[5]	2000
B	1000 [10]	2500 [6]	500 [5]	4000
C	[11]	[7]	3000 [8]	3000
Destination demand	3000	2500	3500	9000 / 9000

Find:

1- Does the solution optimal? If not evaluate cells (A, 2) and (C , 1) by using stepping stone method?

2- If that can decrease transportation costs, determine the maximum amount that can be allocated to the incoming cell.

3- Find the total costs and determine the reduction in the transportation costs.

5- Cars are shipped by truck from three distribution centers to five dealers. The following table showes the shipping cost is based on the mileage between sources, and destination. Find the optimal solution for the starting basic feasible solution use least cost method.

		Dealers					
		1	2	3	4	5	Supply
Destribution centers	1	100	150	200	140	35	400
	2	50	70	60	65	80	200
	3	40	90	100	150	130	150
Demand		100	200	150	160	140	

6- Find the starting basic feasible solution by using vogels', for the following transportation cost problem:

				S
	1	2	1	20
	0	4	5	40
	2	3	3	30
D	30	20	20	

7- Find the starting solution in the following transportation problem by:

1- North west – corner method.

2- Least-cost method.

3- Vogel's approximation method abtain the optimal solution by using the best starting solution:

	1	2	3	4	Supply
	10	20	5	7	10
	13	9	12	8	20
	4	15	7	9	30
	14	7	1	0	40
	3	12	5	19	50
Demand	60	60	20	10	

8- Solve the following cost minimization transporation problem by the U.V method:

	Required			
	1	2	3	Supply
Available	1	9	2	3
	7	10	3	6
	3	6	8	3
Demand	2	8	2	

Why the method give an optimal solution?

9- The set-up time for each job on various machines is given in the following table. It is required to find an assignment of the job to minimize the total set up-time using the hungarian method:

	1	2	3	4	5
1	10	7	3	13	4
2	11	11	6	15	7
3	4	10	9	11	7
4	2	14	12	10	4
5	8	12	14	7	6
6	5	10	7	14	8

10- Consider four bases of operation B_1, B_2, B_3, B_4 and three target T_1, T_2, T_3 because of defferences in aircraft, range to target and flying attitude, the tons of bombs per aircraft from any base that can be delivered to any traget differ according to the following table.

	T_1	T_2	T_3
B_1	8	6	5
B_2	6	6	6
B_3	10	8	4
B_4	8	6	4

The daily sortie capability of each of the four bases is 150 sorties per day. The daily requirement in sorties over each individual target to 200. Find the allocation of sortics from each base to each target which maximize the total tonnage over all three tragets. Do other optimal solution exist?

11- Solve the following assignment model:

	9	2	3	7
6	1	5	6	6
9	4	7	10	3
2	5	4	2	1
9	6	2	4	6

الفصل الخامس

تحليل الشبكات

Network Analysis

الفصل الخامس

تحليل الشبكات

Network Analysis

5-1 Introduction:

In the past, the scheduling of a project was done with little planning. The project defines a combination of interrelated activites that must be executed in a certain order before the entire task can be completed.

Activity: is viewed as a job requiring time and resources for its completion "its one time effort" The activities are interrelated in a logical sequence in the sense that some activities can not start until others are completed.

The project managment has evolved as new field with the development of two analysis techniques for planning scheduling and controlling of the project. These are the critical path method (C.P.M) and project evaluation and review technique (PERT).

The two techniques were developed by two different groups. The CPM and PERT are basically time oriented methods in the sense that both lead to the determination of a time schedule, and they were developed independently, and also they were consisting planning and scheduling and controling.

The best – known planning tool was the Gantt bar chart, which specifies the start and finish time for each activity on horizontal time scale.

شبكات العمل Network هي أحد أساليب بحوث العمليات Operation Research التي تستخدم في مجال التخطيط والمراقبة على الأداء. وأن عملية التخطيط والمراقبة تؤدي دوراً مهماً بارزاً في إنجاح المشاريع، بكونها ذات طابع هندسي يعتمد على الأشكال والرسومات البيانية والهندسية كأساس لتطبيق العلاقات الرياضية التي ترتبط بين متغيرات التخطيط والمتابعة المختلفة ومنها الوقت Timeوالكلفة Cost، الموارد المادية Resources وما إلى ذلك.

المشروع Project وهي عبارة عن مجموعة من الأنشطة Activities ترتبط بعضها مع بعض بعلاقات متبادلة بحيث أن بعض هذه الأنشطة لا يمكن أن تبدأ قبل أن تنتهي النشاطات التي تسبقها.

النشاط Activity هو عبارة عن عملية أو وظيفة يتطلب تنفيذها وقتاً معيناً فضلاً عن كمية الاحتياجات من أيدي عاملة أو مواد أولية أو أجور أو معدات وما شابه ذلك. ومن ثم السيطرة على المشروع بكاملة، وأن لبحوث العمليات أهمية كبيرة في تخطيط ومراقبة المشاريع وخاصةً الكبيرة منها.

ونستنتج من ذلك أن هذه الأنشطة تختلف من حيث الزمن الذي تستغرقه كما تختلف من حيث المتطلبات اللازمة لإنجاز كل نشاط. عليه لا بد من وجود تنظيم وتنسيق ما يحدد تسلسل وترتيب تنفيذ هذه النشاطات ونهايتها جميعاً ينتهي بتنفيذ المشروع، لذلك يتم اللجوء إلى وضع خطة أو شبكة عمل تعبر عن هذه الفعاليات مع بيان الأزمنة التي تستغرقها كل فعالية (نشاط). إن تحليل شبكة العمل Network Analysis ودراستها بشكل دقيق بهدف الوصول إلى أفضل خطة عمل يسمى بالتحليل الشبكي والذي يعتبر من الأساليب العلمية الحديثة لتقييم ومراجعة تنفيذ المشاريع Project Scheduling كما أنه يفيد في التنبؤ For custing بصعوبات تنفيذ كل فعالية لكي يكون بالإمكان مواجهة هذه الصعوبات والتخلص منها.

ويمكن القول أن من أهم ما يميز أسلوب التحليل الشبكي هو:

1- تقسيم المشروع إلى مجموعة متوالية من الأنشطة.

2- ترتيب هذه الأنشطة في تسلسل منطقي من حيث أسبقية التنفيذ وعلاقة كل نشاط مع الأنشطة الأخرى.

3- ربط هذه الأنشطة برسوم وأشكال هندسية معينة مثلاً التعبير عن النشاط Activity بسهم (خط مستقيم) أو استخدام الدوائر للأحداث Events وبالتالي تعطي صورة شبكة العمل Network التي تربط جميع نشاطات المشروع.

وقد تطورت بعض الأساليب القيمة والمفيدة في تنفيذ المشاريع بأقصى وقت ممكن وبأقل التكاليف ومن هذه الأساليب:

1- أسلوب مخطط جانيت Gantt Chart.

2- المخططات الشبكية Project Schaeduling.

2-1 أسلوب المسار الحرج Critical Path Method C.P.M

2-2 أسلوب بيرت PERT

Project Evaluation and Review Technique

1- أسلوب مخطط جانت Gant Chart:

وهو عملية الربط بين الخطوات اللازمة لإنجاز عمل ما وبين وقت تنفيذ هذه الخطوات.

(Which specifies the start and finish times for each activity on a horizontal time scale).

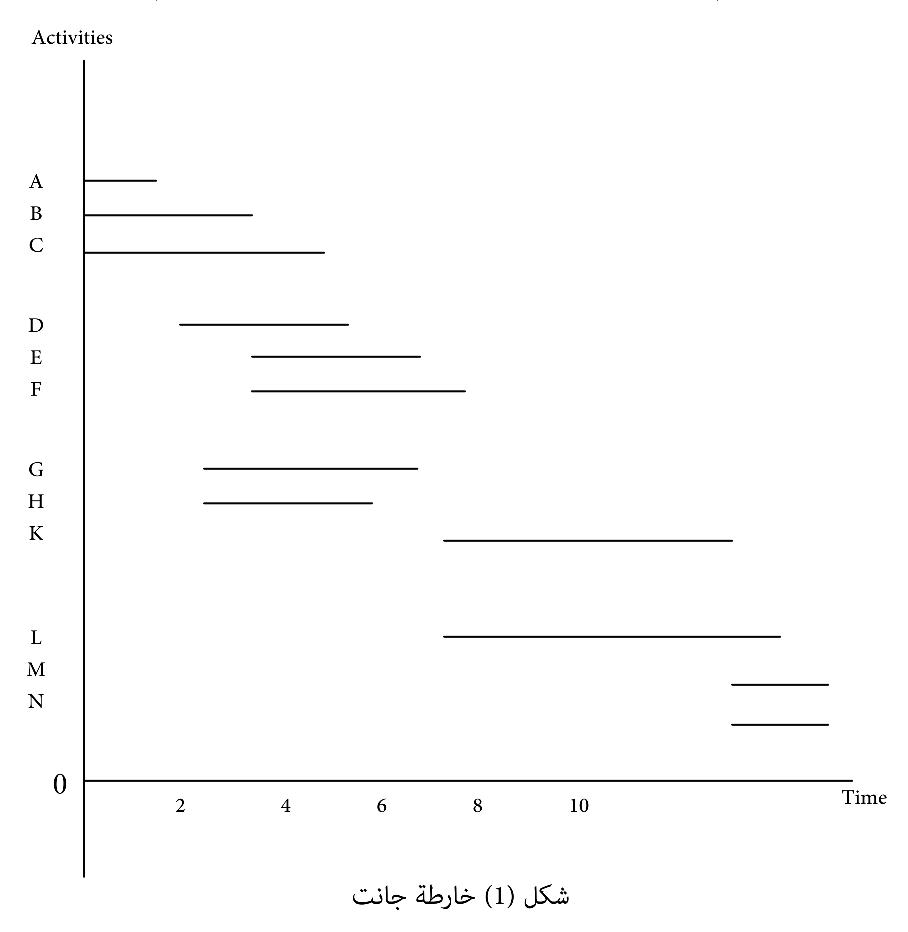
ولكن من عيوب هذه الطريقة أنها لا تلائم المشاريع الكبيرة وذلك لكون هذه المشاريع تتسم بالتغيير.

أما فكرة أسلوب خرائط جانت Gant Chart هو تقسيم المشروع إلى نشاطات متسلسلة ومحددة من حيث الزمن اللازم للإنجاز ويتم التعبير عن هذه الأنشطة من خلال رسم أشرطة أو خطوط بيانية أفقية تقام على المحور العمودي للشكل البياني. أنظر شكل رقم (1).

2- المخططات الشبكية Project Seheduling:

وهي عبارة عن أشكال بيانية تعبر عن صيغة بناء وتصميم المشروع والتي تبدأ من نقطة معينة وتستمر باتجاه معين متفق عليه. وهناك نوعان من المخططات الشبكية وهي أسلوب CPM ومخطط PERT. ويعتبر أسلوب Critical path CPM method هو أسلوب لتخطيط وسيطرة على المشاريع المعقدة والكبيرة مثل بناء المدن أو إنشاء المباني الكبيرة. إن العلاقة ما بين الأسلوبين متقاربة من وجهات كثيرة وأن تطوير أسلوب المسار الحرج كان مستقلاً عن تطوير أسلوب بيرت أما

أسلوب بـيرت Project Evaluation and Review Technique PERT الـذي يعتـبر مـن الأسـاليب ذات الأهمية القصوى في تنفيذ المشاريع، بأقصر وقت ممكـن وبكفـاءة عاليـة. وهـو أسـلوب حـديث للرقابة على سير الأنشطة في المشاريع تحت التشييد أو المعدات تحت الصنع وتحليلها. وتم تطوير هذا الأسلوب من قبل البحرية الأمريكية حيث ساعد هذا الأسلوب في تقليل الفترة الزمنيـة اللازمـة لإكـمال المشروع. لذلك يستخدم في أكثر المشاريع العسكرية والصناعية في كثير من دول العالم.



شكل (1) خارطة جانت

تمثيل الأنشطة حسب وقت نلاحظ أن النشاط A سيستغرق 2 يوم أما B 3 أيام أما النشاط C سيستغرق 5 يوم وهكذا.

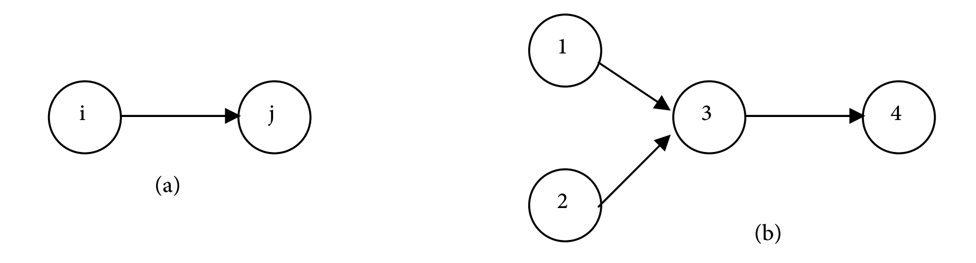
وأن تطوير الأسلوبين كان في وقت واحد وأن الفرق الرئيسي بين الأسلوبين هو أن أسلوب CPM لا يتعامل مع الأوقات الاحتمالية لتنفيذ النشاطات المختلفة. حيث يفترض وقت تنفيذ الأنشطة بشكل طردي مع كمية الموجودات المخصصة للنشاط. وعندما يتغير كمية الموجودات المتاحة يتغير وقت تنفيذ النشاط وبالتالي وقت إكمال المشروع. ويستخدم هذا الأسلوب (CPM) في إيجاد العلاقة بين الكلفة الكلية للمشروع وبين وقت تنفيذ ذلك المشروع ويستخدم كذلك في حالة تنفيذ مشاريع مشابهة لمشاريع نفذت في السابق.

5-2 صياغة شبكة العمل Arrow (Network) Diagram Representations:

The arrow diagram represents the interdependencies and precedence relationships among the activities of project. An arrow is commonly used to represent an activity, with its head indicating the direction of progress in the project. The precedence relationship between the activities is specified by using events. An event represents a point in time that signifies the completion of some activities and the beginning of new ones. The beginning and end points of any activity are thus described by two events usually known as tail and head events. Activities originating from certain event cannot start until the activities terminating at the same event have been completed. Each activity is represented by directed arc and each event is represented by anode.

لغرض التعبير عن الأنشطة activities تستخدم بعض الأشكال والخطوط التي تؤدي بترابطها مع بعضها تكوين شبكة العمل network لأي مشروع Project ويعبر عادة عن الفعالية بسهم arrow يمثل اتجاهه "اتجاه تنفيذ تلك الفعالية". لكل فعالية هناك بداية ونهاية هذه البداية والنهاية تسمى حدث event بداية الفعالية وبحدث نهاية الفعالية (tail and head) ويتم التعبير عن هذين الحدثين بدائرتين (a node) أي لكل فعالية ستكون هناك دائرتين تمثل إحداهما حدث بداية والدائرة الثانية تمثل حدث نهاية الفعالية علماً بأن في بعض الأحيان تعتبر إحدى الدوائر حدث نهاية معينة وفي نفس الوقت تعبر عن نفس الدائرة حدث بداية الفعالية تلي الفعالية السابقة في تسلسل أو ترتيب تنفيذه. وكما ذكرنا يربط بين دائرتي حدثي

البداية والنهاية سهم (arrow) يعبر عن الفعالية (i – j) وفيما يلي بعض الأمثلة توضح فيها النشاط مع الأحداث:



شكل (2)

في الشكل (2) نجد أن شبكة العمل في (a) تمثل نموذج عام لنشاط (i , j) مع tail event I و head event j أما في b تمثل شبكة عمل فنلاحظ ثلاث أنشطة وهي (3 ، 1) ، (3 ، 2) ، (4 ، 3) ونلاحظ أن الحدث 3 هي نهاية للنشاطين هما(3 ، 1) و (3 ، 2) سابقة وفي نفس الوقت هي بداية للنشاط التالي (4 ، 3) ومنها نستنتج أن النشاط (4 ، 3) لا يمكن أن (ينفذ) قبل أن ننهي الفعاليات السابقة لها.

بعض القواعد في تصميم شبكات العمل:

Rules for constructing the arrow diagram (network)

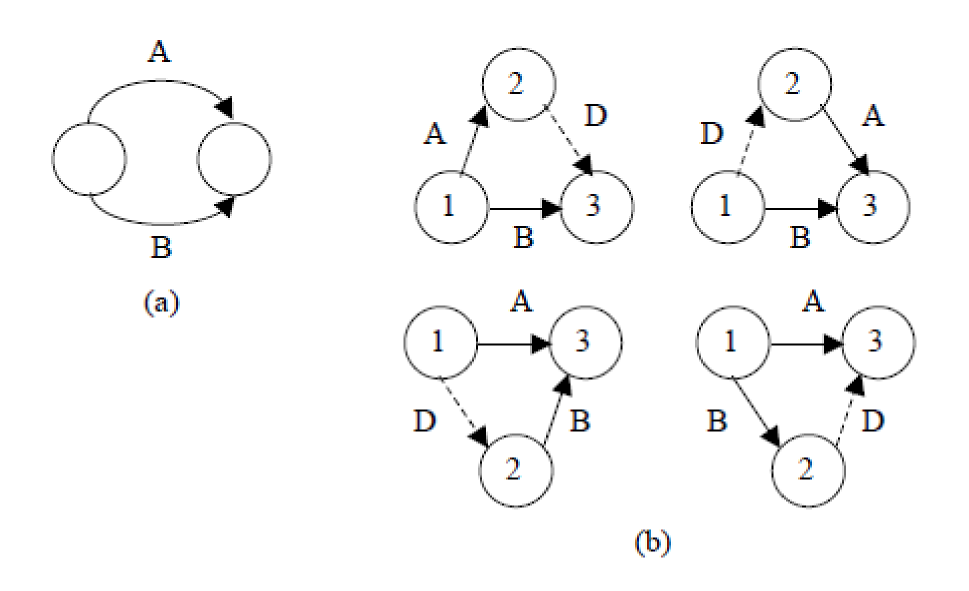
1- كل حدث يتمثل بسهم واحد فقط في شبكة العمل

1- Each activity is represented by one and only one arrow in the network.

2- No two activities can be identified by the same heal and tail events. As in figure (3a).

2- لا يجوز ربط حدثين في آن واحد بنشاطين لَهُمَا نفس البداية والنهاية كما في الشكل (3 a) فإن النشاطين B, A لها نفس النهاية. ففي مثل هذه الحالات

نستخدم الأنشطة الوهمية dumy activity إما بين A وأي نهاية أخرى أو بين B وأي نهاية أخرى كما هو واضح في شكل 3b ويمكن رمز النشاط الوهمي بـ(D) Dummy activity.



شكل (3)

تستخدم الأنشطة الوهمية Dummy activities لتلافي بعض الحالات التي لا يمكن تمثيلها ويكون النشاط الوهمي على شكل خط مستقيم منقوط ----------▶

أما الوقت اللازم لإنجاز هذا النشاط الوهمي المساوي إلى الصفر.

3- كل نشاط يبدأ بحدث بداية يسمى start event وينتهي بحدث نهايةend event.

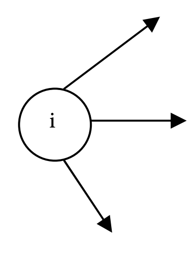
4- يجب أن يتم النشاط قبل أن نبدأ بالنشاط اللاحق لها مباشرة وعلى ذلك فإن حدث البداية لفعالية (نشاط) ما هو إلا حدث نهاية لفعالية سابقة لها.

5- إذا تعددت الأنشطة التي يجب أن تنتهي قبل بداية الأنشطة التالية لها فكل هذه الفعاليات (الأنشطة) تنتهي عند حدث البداية للفعالية التالية لها.

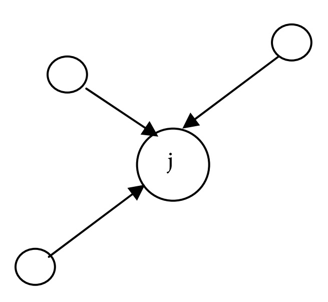
6- إذا تعددت الأنشطة التي تبدأ بعد انتهاء نشاط ما فكل هذه الأنشطة لها حدث بداية واحدة هو نفسه حدث النهاية لتلك النشاط.

7- لكل مشروع له بداية واحدة ونهاية واحدة تغلق فيها الأنشطة السابقة لها.

8- لكل حدث يمكن أن يخرج منه أكثر من نشاط واحد



9- يمكن لكل حدث أن يستقبل أكثر من نشاط واحد قادم من إحداث مختلفة



10- يمكن إعطاء أرقام داخل الحدث بتسلسل منطقي من 1 إلى n من الأحداث.

11- لا يجوز الرجوع من حدث مبكر إلى آخر تم سابقاً إلا في حالة استخدام الأنشطة الوهمية.

مثال (1):

مشروع لإنتاج أجهزة راديو يتطلب القيام بالفعاليات (النشاطات الإنتاجية) التالية:

1- النشاط A دراسة المواصفات المرغوبة تسويقياً وهذه أولى الفعاليات.

2- النشاط B وضع التصاميم والأشكال الهندسية المظهرية وتبدأ بعد انتهاء النشاط A.

3- النشاط C توفير المكائن والمستلزمات الرئيسة للإنتاج ونبدأ بعد انتهاء النشاط A.

4- النشاط D توفير الأيدي العاملة اللازمة للإنتاج وتبدأ بعد انتهاء النشاطين C , B.

5- نشاط E يلي النشاط C (تنظيم الخطوط الإنتاجية داخل المصنع).

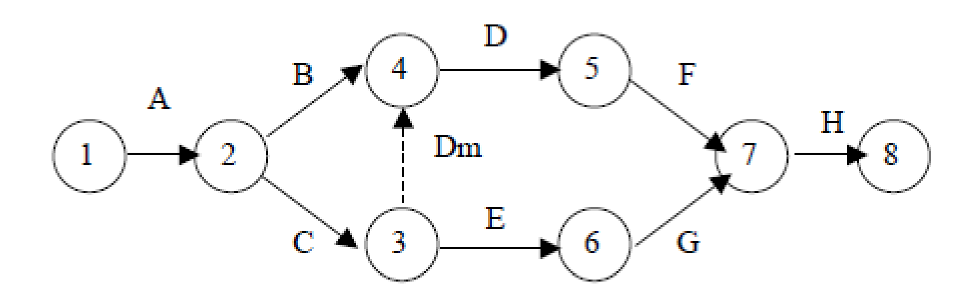
6- نشاط F يلي النشاط D (تدريب العمال على عمليات التصنيع).

7- النشاط G توفير المستلزمات الثانوية للإنتاج وتبدأ بعد إنهاء النشاط E.

8- نشاط H الإنتاج وهو آخر نشاط للمشروع وتبدأ بعد نهاية النشاطينG, F.

Solution:

شبكة العمل لهذا المشروع يكون كما يلي:



شكل (4) شبكة العمل للمشروع

مثال (2):

Construct the arrow diagram comprising activities A, B, C, … and L such that the following relationships are satisfied.

1- A , B and C, the first activities of the project can start simultaneously.

2- A and B precede D.

3- B precedes E, F, and H.

4- F and C precede G.

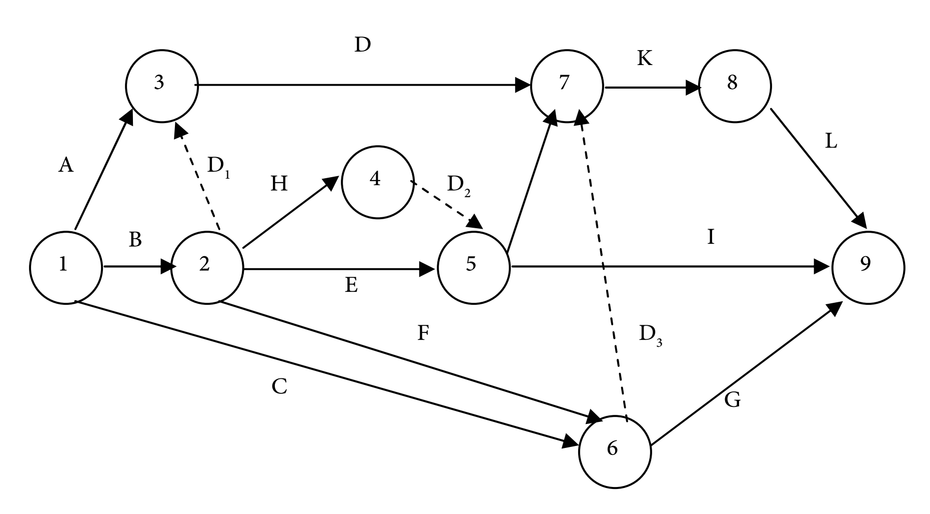
5- E and H precede I and J.

6- C, D, F and J precede K.

7- K precedes L.

8- I, G, and L are the terminal activities of the project.

Solution:



شكل (5) رسم الشبكة

نلاحظ من شكل (5) أن هناك 3 أنشطة وهمية وهي D_1 , D_2 , D_3 استخدمت لتلافي بعض المشاكل الحاصلة لتحسين العلاقات.

مثال (3):

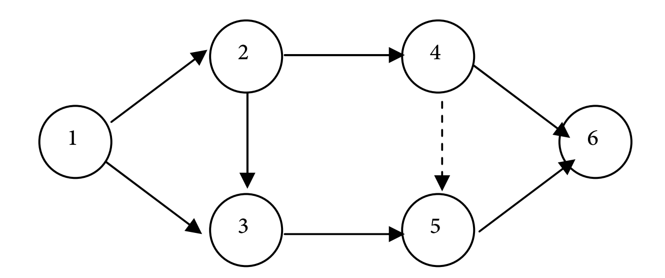
Construct the arrow diagram for the following project:

Activities:

1 – 2
1 – 3
2 – 3
2 – 4
3 – 5
4 – 5
4 – 6
5 – 6

Solution:

لرسم هذا النوع من الشبكات تكون أسهل من المثالين السابقين لأن الأحداث معلومة ما علينا إلا ربط هذه الأحداث بـarrow activity كما يلي:



شكل (6) رسم الشبكة

5-3 المسار الحرج (Critical path method (C. P. M:

وهو أحد أساليب التحليل الشبكي المهمة التي تستخدم لأغراض التخطيط والمتابعة. ولقد تم استنباط الاسم من المصطلح العلمي Critical Path Method حيث الرمز CPM هو الحرف الأول من كل واحد من الكلمات الواردة في المصطلح المذكور. ويستخدم هذا الأسلوب لمعرفة الفترة الزمنية التي سيستغرقها تنفيذ مشروع ما بكامله. ومن أجل توضيح فكرة المسار الحرج لا بد لنا من البداية من توضيح كيفية إعداد الحسابات الزمنية المرتبطة بهذا الأسلوب التي هي أساس ظهور وتحديد المسار الحرج CPM في شبكة الأعمال Network. لأن بعض الأنشطة تستغرق وقتاً أكثر من الأنشطة الأخرى في نفس شبكة العمل وهذا يؤدي إلى ارتباط زمن الإنجاز الكلي للمشروع ارتباطاً تاماً بزمن النشاط الذي يتطلب زمناً أكثر. هذه الأنشطة تسمى بالأنشطة الحرجة بحيث أن أية زيادة في تنفيذ هذه الأنشطة يؤدي إلى تأخير في الزمن الكلي المطلوب لإنجاز المشروع. أما الأنشطة الأخرى الغير حرجة فهي تلك الأنشطة التي تكون قابلة لتأخير ضمن عدد معين وبالتالي قد لا يؤثر هذا التأخير على زمن الاتجاه لهذه الأنشطة وبالتالي على زمن الإنجاز الكلي للمشروع.

فإن هذه الطريقة تهدف إلى دراسة الوقت الاعتيادي اللازم لتنفيذ المشروع ومعرفة إمكانية تقليص وقت الإنجاز ويتم رفع تقارير في فترات زمنية موضحين فيها مراحل الإنجاز للأنشطة مع مقارنتها بجدولتها الزمنية المعدة لهذه الأنشطة

لمعرفة مدى سير الخطة وفيما إذا كان هناك حاجة إلى تقيد الجداول الزمنية لتنفيذ المشروع. فإن فكرة المسار الحرج يتم عبر الخطوات التالية:

أولاً: إن شبكة العمل هي عبارة عن مجموعة من المسارات تبدأ في بداية المشروع وتنتهي عند نهايته، وهذه المسارات تختلف في أطوالها الزمنية لأن كل منها يحتوي على مجموعة من الأنشطة المحصورة بين بداية ونهاية الشبكة. والمسار الذي يستغرقه أطول وقت زمني من بين مسارات الشبكة يسمى بالمسار الحرج Critical وهذا المسار يضم مجموعة من الأنشطة الحرجة Critical activities.

أما الأنشطة الأخرى فتسمى أنشطة غير حرجة Non-Crtitical activities وهذه الأنشطة لا تؤدي إلى تأخير وقت انتهاء المشروع.

ثانياً: لكل نشاط فترة زمنية لا بد من حسابها أما خطوات احتساب هذه الفترات هي:

أولاً- الحسابات الأمامية Forward Calculation:

- الوقت المبكر للابتداء Earliest Start Times:

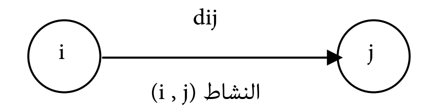
ويقصد بهذا الوقت هو وقت الابتداء بتنفيذ النشاط ويكون بصورة مبكرة ويرمز له بـES_j.

نبدأ عادة في احتساب الأوقات المبكرة بتعيين الوقت المبكر للنشاط الأول (1) حيث يعتبر الوقت المبكر للنشاط 1 مساوياً إلى الصفر أي أن $Es_1 = 0$ ويتم بعد ذلك احتساب الأوقات المبكرة للأنشطة الباقية حسب تسلسلها والفترة الزمنية اللازمة لكل نشاط إلى آخر نشاط (الحدث الأخير) للشبكة ويوضع قيمة Es_j داخل مربع إلى جانب الحدث أي كما يلي:

(1) | Es_1 | لأجل تسهيل عملية حساب الوقت المبكر بافتراض أن الأنشطة المختلفة تكون مرقمة حسب التسلسل التصاعدي للنشاط (j , i)، أي التسلسل

التصاعدي للحدث i حيث i = 0 , 1 , 2 , ... n-1 ومن ثم التسلسل التصاعدي للحدث j حيث j = 1 , 2 , ... , n

نفترض أن dij يمثل الوقت الذي يستغرقه النشاط (i , j) (duration) كما في الشكل التالي:



شكل (7) مخطط لتوضيح الزمن للنشاط (i , j)

أما الصيغة الرياضية التي تحتسب بموجبها الأوقات المبكرة Esj وخاصةً إذا كان الحدث j يرتبط بأكثر من نشاط واحد هي:

$$Esj = \max_{i} [Esi + dij]$$

لجميع قيم i و j المعروفة.

لهذا سميته بمرحلة الاتجاه الأمامي لاحتساب الأوقات المبكرة للأنشطة.

Forward calculation from (i ⟶ j)

ثانياً- الحسابات الخلفية Backward Calculation:

- الوقت المتأخر للنشاط Latest complet time:

إن إيجاد الأوقات المبكرة للمباشرة بتنفيذ الأنشطة المختلفة لـه دور في تحديد الوقت الكلي الذي يستغرقه المشروع ولكن هذا الوقت لا يؤدي إلى معرفة المسار الحرج، لـذلك تحسب الأوقات الأخيرة للأنشطة المختلفة.

ويرمز للوقت المتأخر بـLci ويمثل القيم داخل Δ لتميزه عن الوقت المبكر ويوضع إلى جانب الحدث المراد حساب وقته المتأخر لإنجاز الحدث.

أما الصيغة الرياضي لاحتساب Lci هي:

نفرض أن Lcj يمثل الوقت الأخير للمباشرة بالنشاط j بدون أن يحدث تأخر في الفترة الزمنية لتنفيذ المشروع برمته أي أن Esj=Lcj أو بمعنى آخر

$E_{sn} = L_{cn}$ آخر وقت مبكر للحدث الأخير هو نفس الوقت المتأخر للبدء بالحدث الأخير. علماً بأن $L_{ci} + d_{ij} \leq L_{cj}$، إن أي تأخير في النشاط i يسبب تأخيراً في حدوث النشاط j عن الوقت المطلوب L_{cj} لذا المعادلة الرياضية لحساب L_{ci} إذا كان الحدث i يرتبط بأكثر من نشاط هي:

$$L_{ci} = \underset{j}{\min imum} \ (L_{cj} - d_{ij})$$

وهذه تسمى بالمرحلة backward caculation الحسابات الخلفية أي ابتداء من الحدث j إلى الحدث i (j ⟵ i)

لذا أصبح لدينا نوعين من الحسابات:

1- الحسابات الأمامية Forward Calculation من الحدث i إلى الحدث j آخر حدث في المشروع.

2- الحسابات الخلفية Backward Calculation أي من الحدث j آخر حدث من المشروع إلى أول حدث من المشروع i.

ثالثاً- المسار الحرج:

وبعد إنجاز هذين النوعين من الحسابات يمكن إيجاد المسار الحرج للشبكة باستخدام القواعد الثلاثة التالية لكل نشاط (i , j):

1- $E_{si} = L_{ci}$ $\boxed{i} = \triangle_i$

2- $E_{sj} = L_{cj}$ $\boxed{j} = \triangle_j$

3- $E_{sj} - E_{si} = L_{cj} - L_{ci} = d_{ij}$

فإذا تحققت هذه الشروط الثلاثة على النشاط الواحد يعني ذلك النشاط حرج critical ويمكن وضع علامة (=) المساواة عليه لتميزه عن الأنشطة السابقة الغير حرجة (non - critical) والمثال التالي يوضح جميع العمليات الحسابية لاحتساب المسار الحرج C.P.M.

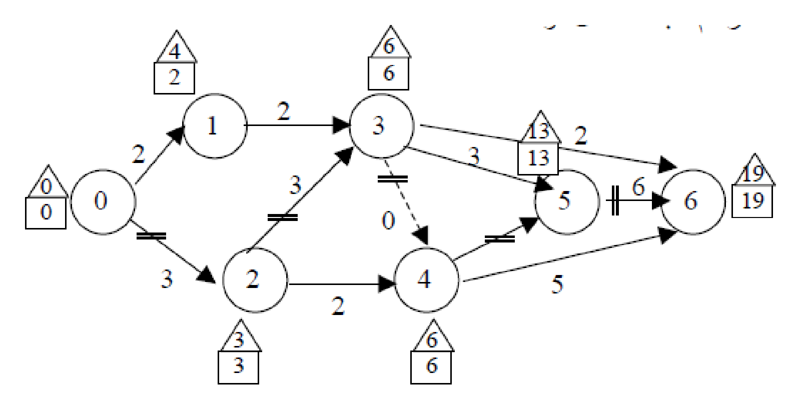
مثال (4):

From the following project determine the critical path computations:

Activity (i , j)	Duration dij
(0 , 1)	2
(0 , 2)	3
(1 , 3)	2
(2 , 3)	3
(2 , 4)	2
(3 , 4)	0
(3 , 5)	3
(3 , 6)	2
(4 , 5)	7
(4 , 6)	5
(5 , 6)	6

Solution:

نرسم شبكة العمل أولاً:



شكل (8) مخطط للشبكة

ثانياً نحسب forward Calculation أي من الحدث 0 إلى الحـدث 6 وذلـك بحسـاب الوقـت المبكر لتنفيذ الأحداث Esj نفرض أن Es0 = 0 إن الوقت المبكر للحدث الأول هو صفر

$Es0 = 0$

$$Es1 = Max\,(Es0 + dij)$$
$$= Es0 + do1$$
$$= 0 + 2 \quad = 2$$

$$Es2 = Es0 + do2$$
$$= 0 + 3 \quad = 3$$

$$Es3 = \max_{1,2} \begin{cases} Es1 + d13 \\ Es2 + d23 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 + 2 = 4 \\ 3 + 3 = \boxed{6} \end{cases}$$

$$Es4 = \max_{2,3} \begin{cases} Es2 + d24 \\ Es3 + d34 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 6 + 0 = \boxed{6} \end{cases}$$

$$Es5 = \max_{3,4} \begin{cases} Es3 + d35 \\ Es4 + d45 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 6 + 3 = 9 \\ 6 + 7 = \boxed{13} \end{cases}$$

$$Es6 = \max_{3,4,5} \begin{cases} Es3 + d36 \\ Es4 + d46 \\ Es5 + d56 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 6 + 2 = 8 \\ 6 + 5 = 11 \\ 13 + 6 = \boxed{19} \end{cases}$$

ومن هذه الحسابات نستنتج أن الوقت المبكر لتنفيذ آخر حدث هو 19 ولا يجوز إنجاز هـذا النشاط قبل 19 يوم مثلاً.

2- نحسب الحسابات الخلفية Backward Calculation أي من الحدث j إلى الحـدث i وكـما يلي:

نفرض أن Es6 = Lc6 = 19

$$LC6 = 19$$

$$LC5 = \underset{j}{Min} \{ LCj - dij$$
$$= LC6 - d56$$
$$= 19 - 6 \quad = 13$$

$$LC4 = \underset{5,6}{Min} \begin{cases} LC5 - d45 \\ LC6 - d46 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 13 - 7 = \boxed{6} \\ 19 - 5 = 14 \end{cases}$$

$$LC3 = \underset{4,5,6}{Min} \begin{cases} LC4 - d34 \\ LC5 - d35 \\ LC6 - d36 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 6 - 0 = \boxed{6} \\ 13 - 3 = 10 \\ 19 - 2 = 17 \end{cases}$$

$$LC2 = \underset{3,4}{Min} \begin{cases} LC3 - d23 \\ LC4 - d24 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 6 - 3 = \boxed{3} \\ 6 - 2 = 4 \end{cases}$$

$$LC1 = LC3 - d13$$
$$= 6 - 2 \quad = 4$$

$$LC0 = \underset{1,2}{Min} \begin{cases} LC1 - d01 \\ LC2 - d02 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 4 - 2 = 2 \\ 3 - 3 = \boxed{0} \end{cases}$$

نلاحظ هنا يجب أن تكون قيمة LC1 = Es1 لأن الوقت المبكر للتنفيذ = الوقت المتأخر لتنفيذ الحدث الأول.

الآن نحسب أي من المسارات السابقة هي الحرجة بعد تطبيق القواعد الثلاثة السابقة لكل نشاط i , j وكما يلي:

1- Esi = LCi

2- Esj = LCj

3- Esj – Esi = LCj – LCj = dij

نلاحظ أن النشاط 1-0 غير حرج لأن المثلث لا يساوي المربع أما النشاط 2-0 فهو حرج لأن الشروط الثلاثة منطبقة عليه 0 = 0 ، 3 =3 ، 3=0−3=0−3=3 وهكذا يتم اختبار بقية الأنشطة والتوصل إلى المسار الحرج وكما هو واضح في الرسم البياني للشبكة في شكل رقم (8).

فإن المسار الحرج هي تلك الأنشطة المعلمة بـ = وهي (C.P.M)

0 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6

ولحساب الفترة الزمنية لهذا المسار كما يلي:

3 + 3 + 0 + 7 + 6 = 19

وهي أطول فترة زمنية لإنجاز المشروع.

رابعاً- تحديد الزمن الفائض (الوقت المرن):

Determination of the float time (Float time):

لاحتساب الزمن الفائض للأنشطة المختلفة أهمية كبيرة تؤدي إلى تطوير وضع المشروع تحت الدراسة، وإلى احتساب التأخير في الأنشطة المختلفة دون أن يتأثر الوقت الكلي لإنجاز المشروع. وأن هذا الوقت الفائض float time يتوفر فقط في الأنشطة الغير حرجة non-critical activities أي التي تكون ضمن المسار الحرج لأنه لا وجود للوقت الفائض في الأنشطة الحرجة Critical activities (أي أن الوقت الفائض لهذه الأنشطة تساوي إلى الصفر) وإنما هي التي تحدد زمن إنجاز المشروع project.

هناك نوعان من الأوقات لها فوائد في السيطرة على إدارة وتنفيذ المشاريع وهي:

1- الوقت المرن الكلي Total float:

وهو عبارة عن الفرق بين أقصى زمن متاح لإنجاز النشاط وبين ما يتطلبه النشاط فعلاً من زمن يعني أكبر وقت يمكن تأجيل المباشرة في تنفيذ النشاط وبدون تأثير على وقت إنجاز المشروع ويمكن حساب الوقت المرن الكلي Total float كما يلي:

إن الوقت المبكر للنشاط i , j يساوي Esi وقبل البدء بحسابات الوقت المرن الكلي لنتعرف على وقتين جديدين متعلقة بالأنشطة، وهما Latest start الوقت البدء المتأخر للنشاط i , j ويرمز له Ls ووقت الإكمال المبكر Earliest completion ويرمز له (Ec) والمعرفة للنشاط (i , j) فإن:

$Lsij = LCj - dij$ وقت بدأ متأخر

$Ecij = Esi + dij$ وقت الإتمام المبكر

وكما عرفنا سابقاً الوقت المرن الكلي Total float (Tfij) للنشاط ij هو عبارة عن الفرق بين أقصى زمن متاح لإنجاز النشاط (LCj – Esi) وبين الفترة الزمنية اللازمة لإنجازه dij فإن الوقت المرن الكلي Total float للنشاط i , j:

$$Tfij = LCj - Esi - dij = LCj - Ecij = Lsij - Esi$$

2- الوقت المرن الحر Free float:

إن الوقت المرن الحر Free Float ويرمز له FFij للنشاط i , j هو عبارة عن أكبر وقت يمكن تأجيل المباشرة بتنفيذ نشاط ما إذا ابتدأت كافة الأنشطة الباقية في الأوقات المبكرة لها. ففي هذه الحالة FFij للنشاط (i , j) هو عبارة عن الزيادة في الزمن المتاح (Esj – Esi) فوق زمن الاستغراق (= dij) الذي يتطلبه إنجاز المشروع.

فإن الوقت المرن يحسب كالآتي:

$$FFij - Esj - Esi - dij$$

إن حسابات المسار الحرج والزمن الفائض للأنشطة الغير حرجة يمكن أن تنظم في جدول مناسب كما هو واضح في جدول (1) كما في العمود (1) ، (2) ، (3) و (6) والمحسوبة في شبكة العمل للمثال السابق (مثال رقم (4))، أما بقية المعلومات والتي تم حسابها باستخدام الصيغ الرياضية التي ذكرت سابقاً بالنسبة إلى كل من Ecij و Lsij و TFij و FFij.

		Earliest		Latest			
Activity	Duration	Start	Completion	Start	Completion	Total float	Free float
		□			△		
(i , j)	dij	Esi	Ecij	Lsij	LCj	TFij	FFij
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(0 , 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0 , 2)	3	0	3	0	3	0*	0
(1 , 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2 , 3)	3	3	6	3	6	0*	0
(2 , 4)	2	3	5	4	6	1	1
(3 , 4)	0	6	6	6	6	0*	0
(3 , 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3 , 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4 , 5)	7	6	13	6	13	0	0
(4 , 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5 , 6)	6	13	19	13	19	0*	0

جدول (1)

حسابات المسار الحرج

حيث (*) تدل على المسار الحرج.

5-4 أسلوب PERT (تقييم ومراجعة البرامج):

Project Evaluation and Reviw Technique

يعتبر هذا الأسلوب من الأساليب ذات الأهمية القصوى للتنفيذ المشاريع بأقصر وقت ممكن وبكفاءة عالية. وقد تم استخدام هذا الأسلوب من قبل البحرية الأمريكية عندما نفذت مشروع الصواريخ عبر القارات والمسمى بمشروع بولاريس Polaris Missile فقد ساعد هذا الأسلوب PERT بتقليل فترة تنفيذ المشروع من خمس سنوات إلى سنتين. لذا استخدم هذا الأسلوب في كثير من المشاريع العسكرية والصناعية وخاصةً في الدول المتقدمة صناعياً.

أسلوب PERT يأخذ بنظر الاعتبار احتمالات متعددة بعدد الفترة الزمنية لكن أسلوب CPM يعتمد على الوقت المطلوب لتنفيذ الأنشطة الضرورية لإكمال الفعاليات المختلفة التي يتضمنها المشروع، وإن الوقت محدد ومعروف مسبقاً. وبالتالي فإن المدة الزمنية اللازمة لتنفيذ المشروع بصورة نهائية تمتد بدرجة عالية من الدقة كما تبين من الأمثلة السابقة. ونجد أن هذا النوع من الأزمنة غالباً تستخدم في المشاريع ذات الصيغة التقليدية مثل مشاريع البناء والتشييد وفي خطوط الإنتاج...الخ.

أما في الحياة العملية فإن كثيراً من المشاريع لا يمكن إعطاء تقديرٍ دقيقٍ وثابت للزمن الذي يستغرقه كل نشاط. لذلك من الضروري الأخذ بنظر الاعتبار احتمالات متعددة (للزمن) لتنفيذ الأنشطة والفعاليات المختلفة التي يتطلبها إنجاز المشروع.

5-4-1 Probability Consideration in the project scheduling:

في هذا النوع من المشاريع يكون التوزيع الاحتمالي للأزمنة اللازمة لإنجاز النشاط معلوماً وهذا ما نجد في المشاريع التي تجري تطويراً في تكنولوجيا مثل برامج الفضاء، وتطوير المعدات وغيرها من المشاريع المتماثلة ولذلك وفي ظل عدم التأكد (الاحتمالات Probability) من أزمنة الإنجاز فيتم اللجوء إلى أسلوب PERT أي جدولة ودراسة المشاريع.

فإن هذا الأسلوب PERT يأخذ بنظر الاعتبار ثلاثة أنواع من الاحتمالات التخمينية للزمن اللازم لتنفيذ المشاريع المختلفة:

أولاً- الزمن التفاؤلي Optimistic Time:

وهي تخمين لأقل فترة زمنية للقيام بالنشاط أو الأنشطة المختلفة.

الزمن التفاؤلي هو الزمن الذي يستغرقه نشاط معين لغرض تنفيذ فعالية ما إذا كانت الأمور جيدة في نطاق المشروع (الزمن المرغوب للإنجاز) ويرمز له بـ a.

a: (Optimistic time, which will be required if execution goes extremely well).

ثانياً- الزمن الأكثر احتمالاً Most likely time:

وهو التخمين الطبيعي للمدة الزمنية اللازمة لتنفيذ الفعاليات المختلفة. وهذا التقدير يمثل واقع الزمن الضروري إذا كانت المشاريع (Projects) قد اكتسبت خبرات كافية في تنفيذ مشاريع مماثلة في الماضي بحيث تؤهلها هذه الخبرات لوضع تقديرات زمنية دقيقة نسبياً. ويسمى بـ(الزمن التنفيذي الطبيعي). ويرمز له بـM زمن الأكثر احتمالاً.

M: Most likley time, which will be required if execution is normal.

ثالثاً- الزمن التشاؤمي Pessimistic time:

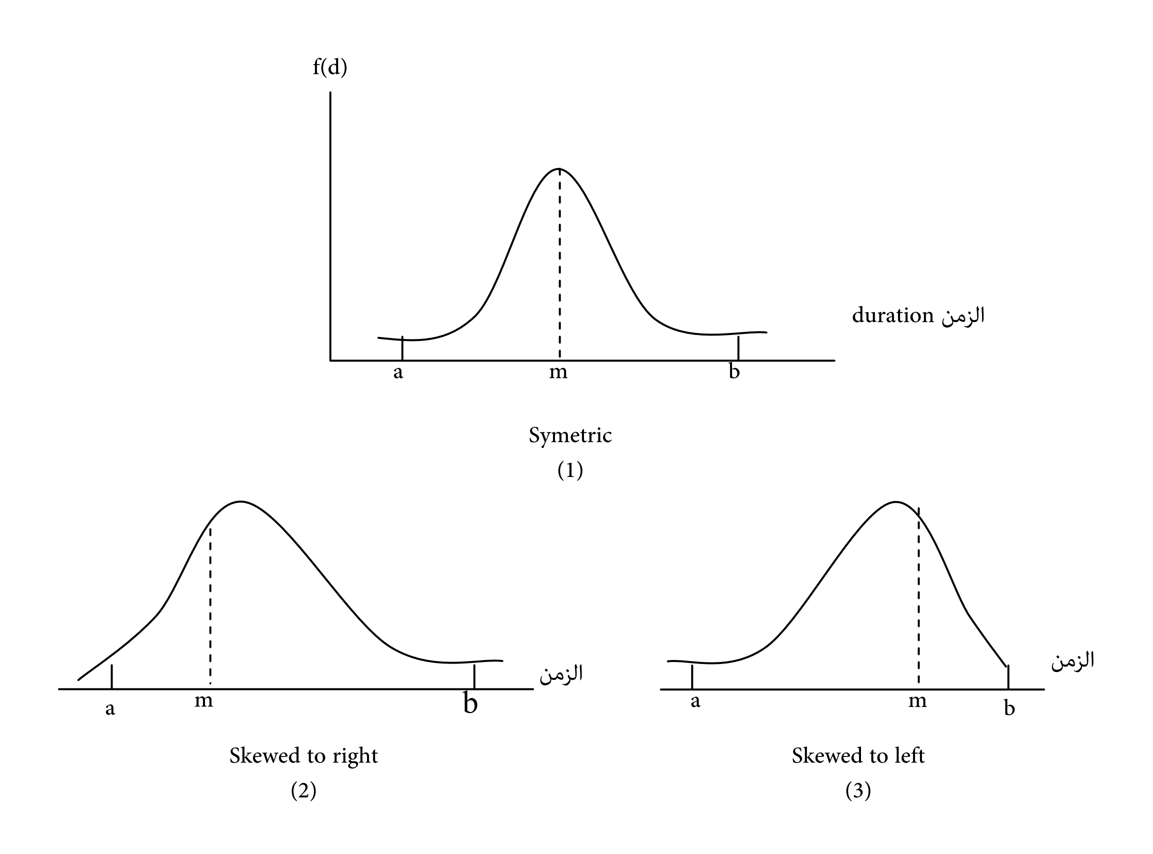
وهو تخمين أطول فترة زمنية ممكنة والتي يستغرقها النشاط ذو العلاقة. ويحسب هذا التقدير على أساس تواجد عقبات تسبب عرقلة العمل (كحدوث عطل في المعدات، إعادة تصميم وتنفيذ بعض أجزاء المشاريع المختلفة، أو غير ذلك من المشكلات) والتي تؤدي بالتالي إلى تأخير تنفيذ المشروع في الموعد المطلوب (الزمن الغير مرغوب للإنجاز).

ويمكن إعطاء رمز إلى الزمن التشاؤمي وليكن b.

b: Pessimistic time, which will be required if every thing goes badly.

وبسبب هذه القيم الثلاثة للأزمنة فإنه يصعب جدولة المشاريع لذلك يتم إيجاد معدل متوسط بين الزمن التفاؤلي والتشاؤمي $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ أما بالنسبة إلى Most likely الزمن الأكثر احتمالاً يمكن أن تقع إلى يمين أو يسار هذا المتوسط.

من البديهي ملاحظة أن المدة الزمنية لكل نشاط يمكن أن تكون موزعة توزيع بيتا Beta distribution. ونقطة تحديها الوحيدة عند النقطة M وأن نقاط نهاياتها تكون عند النقطتين a و b والأشكال التالية تمثل الحالات الثلاثة لتوزيع بيتا وكما هو واضح في (1 ، 2 ، 3) شكل رقم (9):



شكل رقم (9)

وفي شكل رقم (9) نلاحظ الحالات التي تمثلها الأزمنة الثلاثة وهي (1) الحالة المتماثلة symetric (2) حالة الالتواء إلى اليمين skewed to right (3) حالة الالتواء إلى اليسار skewed to left.

وبسبب هذه الأنواع الثلاثة من الحالات يتم اللجوء إلى حساب المعدل المتوسط Average أو Mean والذي يرمز له $\bar{D}$ وكذلك نحسب التباين (v) Variance لتوزيع بيتا Beta distribution.

وبما أن توزيع Beta هو وحيد العقد بقيمة قصوى وحيدة (وأن هذا التوزيع أقرب التوزيعات الاحتمالية)، وله قيم نهاية محدودة. وإضافة لذلك أن توزيع بيتا يمكن تغيير مقاييسه ليكون متماثلاً أو ملتوياً إلى اليمين أو ملتوياً إلى اليسار.

أما معادلة إيجاد معدلة (متوسط) الأزمنة والتي يسمى بالزمن المتوقع للإنجاز لكل فعالية على حدة بموجب الصيغة التالية:

$$\bar{D} = \frac{\frac{a+b}{2} + 2m}{3}$$

$$\bar{D}ij = \frac{a+b+4m}{6}$$

حيث أن:

a: الزمن التفاؤلي

m: الزمن الأكثر احتمالاً لإنجاز النشاط

b: الزمن التشاؤمي

$\bar{D}ij$: الزمن المتوقع للإنجاز لكل فعالية (ij) من الفعاليات

وأن حساب المعدل الزمني لإنجاز كل نشاط هو بمثابة محاولة لإيجاد زمن إنجاز واحد ومحدد لإنجاز الفعالية.

إن حساب المعدل الزمني لإنجاز كل نشاط من الأنشطة للشبكة لا يكفي لإعطاء صورة واضحة عن طبيعة البيانات التي حسب لها المعدل الزمني وعليه لإعطاء وضوح أكثر لبيانات الأزمنة فإنه يجب حساب ومعرفة مقدار تفاوت واختلاف أزمنة كل فعالية عن معدلها الزمني $\bar{D}$. فإن هذا التفاوت يمثله التباين (V) ويمكن حسابه كما يلي:

$$V = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

والآن يمكن تقدير (estimate) احتمال وقوع الحدث في الشبكة

(It is possible to estimate the probability of occurrence of each event in the network).

فإذا فرضنا أن μ_i تمثـل الوقـت المبكـر للحـدث i. فـإن μ_i يعتـبر متغـيراً عشـوائياً (random variable) ويفرض أن كل الأنشطة في الشبكة مستقلة (independent) من ناحية إحصائية.

فإن المعدل الزمني التجميعي المتوقع هو:

$$E(\mu_i) = Esi = \sum_{i=12}^{n} \bar{D} i$$

أما التباين التجميعي $V(\mu_i)$ المتوقع هو:

$$V(\mu i) = \sum_{k=1}^{n} Vk$$

وأن k تمثل أطول نشاط للمسار في شبكة العمل.

إن الغرض من حساب هذين المقياسين (المعدل الزمني التجميعي والتباين الزمني التجميعـي) هو لكي يلجأ إلى استخدام التوزيع الاحتمالي الطبيعي Normal distribution لإيجاد الاحتمال الزمني لإنجاز فعاليات المشروع لأية أزمنة STi يتم تحديدها من قبل إدارة المشروع، إن تحديد الـزمن (STi) يعتمد على تحليل طبيعة أزمنة إنجاز أنشطة المشروع وذلك بتحويل STi إلى المتغير الطبيعي القيـاسي Zi بموجب الصيغة التالية:

$$Zi = \frac{STi - E(\mu i)}{\sqrt{var(\mu i)}}$$

هذا يعني أن μi يتوزع طبيعيـاً بوسـط حسـابي E(μi) وبتبـاين Va(μi) وبمـا أن μi مثلـت الوقت المبكر لإنجاز الحدث i فإن الزمن المتوقع (STi) يمثل Scheduled time فـإن الاحـتمال يكـون كما يلي:

$$P(\mu_1 \le STi) = p\left\{ \frac{\mu_i - E(\mu_i)}{\sqrt{Var(\mu_i)}} \le \frac{STi - E(\mu_i)}{\sqrt{Var(\mu_i)}} = P(Z \le Ki) \right.$$

حيـث Z تمثـل الدرجـة المعياريـة Standard normal distribution بوسـط حسـاب صـفر وبتباين مساوي إلى واحد، فإن:

$$K_i = \frac{STi - E(\mu_i)}{\sqrt{Var(\mu_i)}}$$

K تمثل المسار الحرج (أطول مسار للمشروع)

STi الزمن الذي يتم تحديده من قبل إدارة المشروع للحدث i لحساب الاحتمال الزمني له

$E(\mu_i)$ المعدل الزمني التجميعي لإنجاز أنشطة المشروع حسب تسلسل الفعاليات إلى آخر حدث i

بعد إيجاد قيمة Zi لجميع أحداث الشبكة i نستخرج الاحتمال المقابل لهذه القيم P(Zi) من جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي (*)Z وهذا الاحتمال الزمني لإنجاز تنفيذ النشاطات المشروع يوفر لإدارة المشروع وسيلة لتقييم ومراجعة أزمنة تنفيذ أنشطة المشروع وإعادة الجدولة الزمنية للأنشطة.

مثال (5):

Consider the project with value of a , b , m shown in the table below:

Activity	Estimated Times		
i , j	a	b	m
0 , 1	1	3	2
0 , 2	2	8	2
1 , 3	1	3	2
2 , 3	1	11	1.5
2 , 4	0.5	7.5	1
3 , 5	1	7	2.5
3 , 6	1	3	2
4 , 5	6	8	7
4 , 6	3	11	4
5 , 6	4	8	6

Solution:

نحسب معدل الزمن المتوقع للإنجاز بموجب الصيغة الرياضية:

لكل نشاط من أنشطة المشروع $$\bar{D}ij = \frac{a+b+4m}{6}$$

(*) جدول التوزيع الطبيعي في الملحق.

وكذلك نحسب التباين Variance Vij لكل نشاط في أنشطة المشروع وحسب الصيغة الرياضية التالية:

$$Vij = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

والجدول التالي يبين المعدلات الزمنية المتوقعة وكذلك التباين لكل نشاط من أنشطة المشروع (i , j):

النشاط Activity	معدل الزمن المتوقع للنشاط $\bar{D}$ ij	التباين الزمني للنشاط Vij
0 , 1	2	0.33
0 , 2	3	1.00
1 , 3	2	0.33
2 , 3	3	2.78
2 , 4	2	1.36
3 , 5	3	1.00
3 , 6	2	0.11
4 , 5	7	0.11
4 , 6	5	1.78
5 , 6	6	0.44

وبعد حساب المعدلات الزمنية المتوقعة لجميع الأنشطة تحدد أطول المسارات في بداية الشبكة وإلى نهايتها لكي نحدد event التي تقع عليه ومن ثم يتسنى لنا حساب المعدل الزمني التجميعي $E(\mu_i)$ والتباين الزمني التجميعي STi لتلك الأحداث التي تقع على أطول مسار.

أما الاحتمالات لكل من STi والقيمة المتوقعة إلى $E(\mu_i)$ موضحة في الجدول التالي مع احتساب قيمة Ki واحتمال $P(Z \leq Ki)$ وأن أطول مسار لمثالنا السابق وبالعودة إلى رسم الشبكة في شكل رقم (8) نلاحظ لدينا المسارات التالية:

المسار الأول: 0 ، 1 ، 3 ، 6 بطول زمني 6

المسار الثاني: 0 ، 1 ، 3 ، 4 ، 6 بطول 9 يوم

المسار الثالث: 0 ، 1 ، 3 ، 5 ، 6 بطول 13 يوم

المسار الرابع: 0 ، 1 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 بطول 17 يوم

المسار الخامس: 0 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 بطول 11 يوم

المسار السادس: 0 ، 2 ، 4 ، 6 بطول 10 يوم

المسار السابع: 0 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 بطول 19 يوم

من هذا نرى أن المسار السابع هو أطول المسارات من حيث الزمن والمتمثل بــ19 يـوم وهـو يمثل المسـار الحـرج للشـبكة بأسـلوب CPM وبحسـاب المعـدل الزمنـي التجميعـي والتبـاين الزمنـي التجميعي للأحداث التي تقع عليه هذه الأحداث ابتداءً من 0 وإلى 6 وبموجـب الصـيغتين الرياضـيتين لكل من $E(\mu_i)$و $V(\mu_i)$ وبعد ذلك يكون بمقدورنا حساب الاحـتمال الزمنـي لإنجـاز الأنشـطة لأطـول مسار في شبكة العمل للأزمنة STi والتي تحدد من قبل إدارة المشروع وذلك باستخدام الصيغة:

$$Ki = Zi = \frac{STi - E(\mu_i)}{\sqrt{Var(\mu_i)}}$$

الحدث Event	المسار Path	$E(\mu_i)$	$V(\mu_i)$	sTi	K_i	$P(Z \leq K_i)$
1	0 , 1	2	0.33	4	3.48	0.999
2	0 , 2	3	1.0	2	-1.000	0.159
3	0 , 2 , 3	6	3.8	5	-0.512	0.304
4	0 , 2 , 3 , 4	6	3.8	6	0.0	0.500
5	0 , 2 , 3 , 4 , 5	13	3.91	17	2.020	0.987
6	0 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6	19	4.35	20	0.480	0.684

بعد احتساب قيم K_i واحتمال $P(Z \leq K_i)$ فالجدول المقابل لهذه القيم (المنحنـى الطبيعـي) وكما هي واضحة من الجدول أعلاه

4-2 Cost Considerations in Project Scheduling

The cost aspect is included in project scheduling by defining the cost-duration relationship for each activity in the project. Costs are defined to include direct elements only. Indirect cost such as adminstrative or supervision cannot be included. Their effect will be included in the final analysis however. Figure (10) shows a typical straight-line relationship used with most projects.

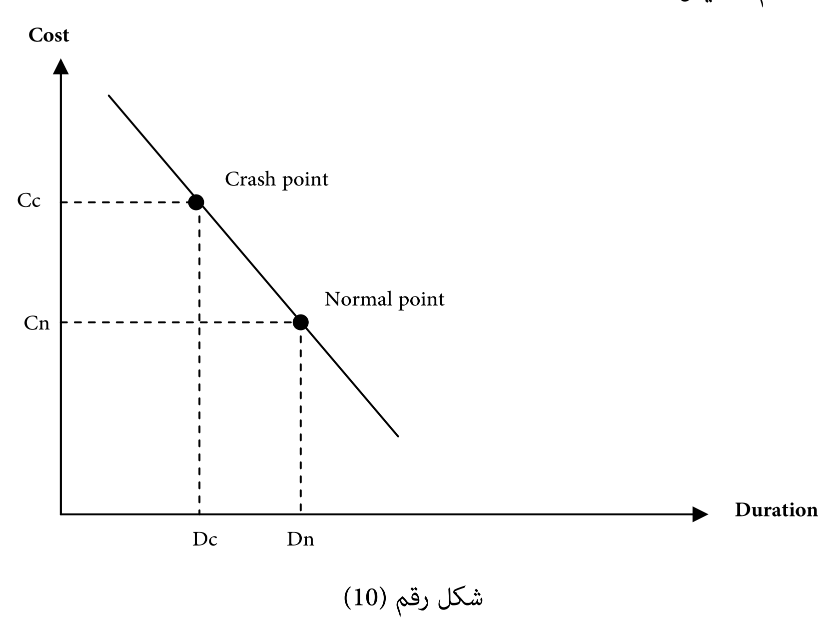
كما ذكرنا سابقاً أن الهدف من أسلوب المسار الحرج CPM هو التعرف على الوقت الاعتيـادي اللازم لتنفيذ المشروع. أما أسلوب PERT تسمح بعشوائية أزمنة الإنجـاز. لـذا فالأسـلوب الأول CPM تدخل في اعتبارها إمكانية تغيير زمن الإنجاز بالتخطيط المسبق عند تحليل ودراسة التكلفة. فـإذا كـان المشروع المطلوب تخطيطه وجدولته ومتابعته هو مشروع له حاجة ملحة لتقليص فترة الإنجاز فيجـب المقارنة بين مزايا تخفيض فترة الإنجاز وكلفة هذا التخفيض وحسم الجدوى.

إن كلفة إنجاز مشروع ما تتكون مـن كلفـة مبـاشرة direct costs duration وهـي مصـاحبة لكـل نشـاط في المشروع project. أمـا الكلـف الغـير مبـاشرة indirect costs مثـل إدارة المشروع administrative أو الخدمات supervision تكون غير مشمولة. لكن تأثيرهـا يكـون عـلى الحسـابات النهائية للمشروع. أي يمكن التعبير عن هذه الكلف كما يلي: أن الكلفة المباشرة تزداد عكسياً مع زمـن الإنجاز أما الكلف الغير مباشرة فإن علاقتها طردية مع زمن الإنجاز. بافتراض أننـا نتمتـع بقـدرة كافيـة لتحكم في زمن الإنجاز (الحد الأقصى والحد الأدنى). أي يمكن القول أن هناك زمن أمثل لإنجـاز المشروع الذي يحقق أقل كلفة مباشرة وغير مباشرة، وقد يكون هذا الزمن الأمثل والكلفة المصاحبة لهذا الـزمن هو هدف المشروع.

والشكل (10) يبين العلاقة الخطية والمستخدمة في أكثر المشـاريع وهـذه العلاقـة المتمثلـة بـين الكلفـة والـزمن لكـل نشـاط مـن أنشـطة المشروع. فـإن النقطـة (Dn , Cn) تمثـل الـزمن الاسـتغراق duration Dn لتنفيذ النشاط أما Cn تمثل الكلفة المصاحبة لهـذا الـزمن عنـد تنفيـذ النشـاط ضـمن الظروف الطبيعية (normal conditions) لذا تسمى بالنقطة الطبيعية كما واضحة في شكل (10).

ويمكن تقليص زمن الإنجاز Dn الطبيعية بزيادة المـوارد والإمكانيـات المتاحـة مـن عـمال ومهندسـين ولكن هذا يؤدي إلى زيـادة الكلفـة المبـاشرة direct cost وهـذه الزيـادة لـن تسـتمر إلى لا نهايـة عليـه فـإن الاستمرار بزيادة الموارد والإمكانيات إلى أبعد قد لا يقلص زمن الاستغراق فتصبح الكلفة لا مبرر لها. فإن زيـادة الكلفـة تـؤدي إلى تقلـيص الـزمن إلى حـد معـين يسـمى بحـد الـزمن الأقصى للانخفـاض أو مـا يسـمى

بـcrash point أو crash time وعند هذه النقطة لا توجد أي تقليص في الفترة duration وعند هذه النقطة تزداد الكلفة بدون تقليل زمن الإنجاز وهذه واضحة كما ذكرنا في الشكل أدناه كعلاقـة خطيـة لغرض الملائمة لأنه يمكن تحديد كل نشاط مـن معرفـة النقطـة الطبيعيـة normal point (Dn, Cn) ونقطة تصادم (تقليص)crash time (Dc, Cc).

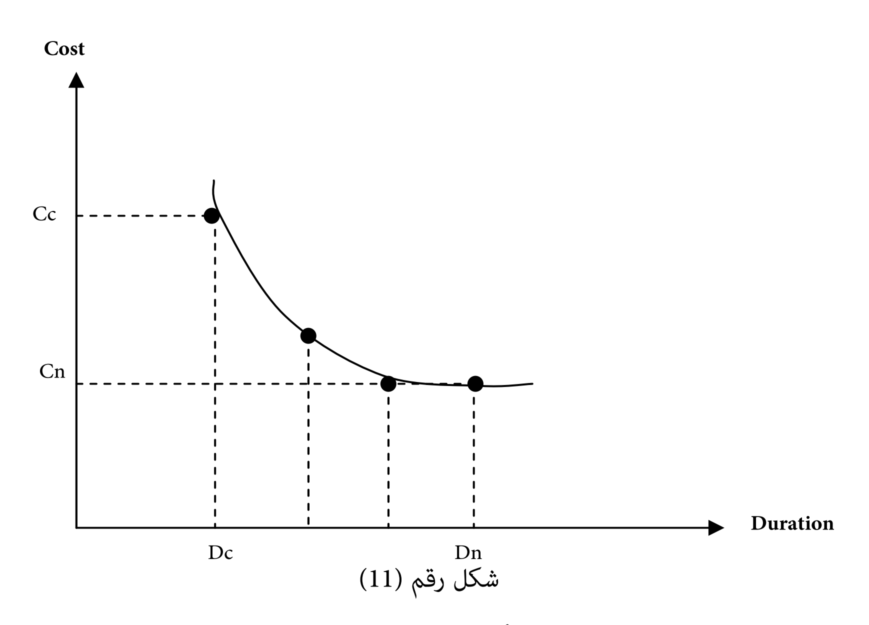


شكل رقم (10)

أما العلاقة الغير خطية فستعقد الحسابات وتزيد من صعوبتها. لكن هناك حالة مقبولة عندما يكون في الإمكان تقريب العلاقة الغير خطية (المقصود بها منحنى) وجعلها خطية وذلك بتقطيعهـا إلى قطع (picewise) كما هي في شكل (11) إلى عدد من الأجزاء وعند هذه النقطة يمكن تجزئـة النشـاط إلى أجزاء تسمى subactivities والعائدة للخط الواحد أو لتطابق الخط المستقيم. نلاحـظ أن الزيـادة في ميل الخط المستقيم أي بالتنقل من normal point إلى crash point ويطلـق عـلى هـذه المعادلـة بميل slope cost:

$$\text{Slope} = \frac{Cc - Cn}{Dn - Dc} = \frac{\text{التغير في الكلفة}}{\text{التغير في الزمن}}$$

فإن زيادة الكلفة ناتجة عن تقليل فترة إنجاز المشروع ولكـن ضـمن الإمكانيـة المحـدودة كـما واضح في شكل (11). فإن تقليص زمن الإنجاز للأنشطة الحرجة هو الذي يؤثر على زمن الإنجاز الكـلي للمشروع ويجب ملاحظة ما يلي: أن عملية تقليص الزمن للأنشطة يجب أن يراعى لكل الأنشطة عـلى حدة وأن هذا التقليص يجب أن يراعي فيه أيضاً الزيادة الحاصلة في الكلفة.

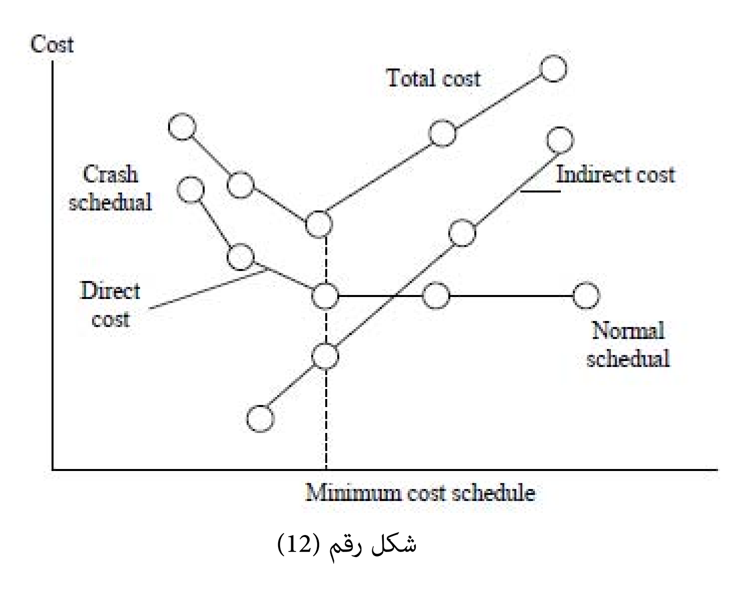


شكل رقم (11)

شكل يمثل عدد الأجزاء للنشاط لتطابق خط مستقيم

وأن الذي يحصل من جراء تقليص الزمن هو جدولة جديدة للمشروع وربما ظهور مسار حـرج جديد وتكون الكلفة المصاحبة لهذه الجدولة الزمنية الجديدة أكبر من الكلفة للجدولة السابقة.

تقلل الجدولة الجديدة الزمن باختيار الفعالية الحرجة التي لها أقل انحدار (ميل) هذا التقليل يسري على الأنشطة الحرجة فقط إلى أن نصل بـزمن الإنجـاز (النقطـة القصـوى crash point) وينـتج عن ذلك منحنيات كلف أزمنة لجدولات مختلفة، كما هو واضح في شكل (12):



شكل رقم (12)

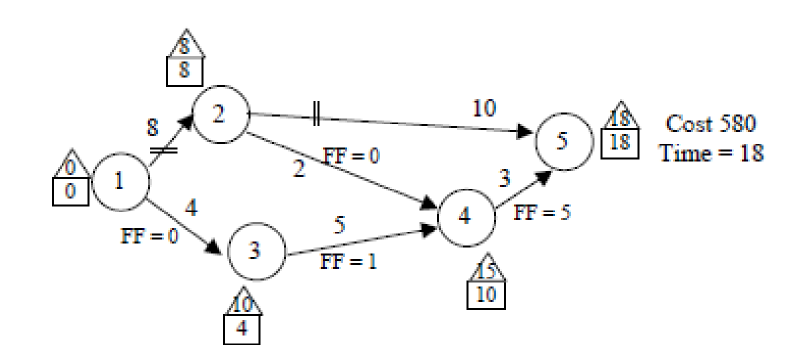
مثال (6):

Consider the following activities with its normal and crash points for each activity its required to compute the different minimum – cost schedules that can occur between normal and crash times.

Activity	Normal		Crash	
(i , j)	Duration	Cost	Duration	Cost
1 , 2	8	100	6	200
1 , 3	4	150	2	350
2 , 4	2	50	1	90
2 , 5	10	100	5	400
3 , 4	5	100	1	200
4 , 5	3	80	1	100
		580		1340

Solution:

أولاً: نرسم شبكة العمل للأنشطة الواردة في المثال ثم نحسب المسار الحرج لها:



شكل رقم (13) رسم الشبكة

المسار الحرج (5 – 2 – 1)

ثانياً: احسب slope لكل نشاط في الشبكة بموجب القاعدة:

$$Slope = \frac{Cc - Cn}{Dn - Dc}$$

Activity	Slope
1 , 2	50*
1 , 3	100
2 , 4	40
2 , 5	60*
3 , 4	25
4 , 5	10

ثالثاً: أما خطوات تقليص زمن الإنجاز الكلي للمشروع هو:

Step 1:

نحدد المسار الحرج والأنشطة الحرجة كما هي واضحة في شكل (13) والتي تم حسابها ضمن الظروف الطبيعية. فإن 2-1 و5-2 هي الأنشطة الحرجة للشبكة.

والزمن اللازم للإنجاز هو 18 يوم بكلفة 580 ضمن الأجواء الطبيعية.

Step 2:

تخفيض زمـن الأنشـطة الحرجـة إلى أن تصـل إلى نقاطهـا القصـوى crash time. ونبـدأ عـادةً بالنشاط الحرج الذي يقابل أصغر ميل critical activity with lowest slope فالنشـاط الحـرج (1 , 2) يقابل ميل 50 أما النشاط الحرج (2, 5) يقابل ميل 60 لذا نختار (2 , 1).

Step 3:

نحسب الوقت الفائض (Free Float (FF لكل الأنشطة الغير حرجة، والتي قد تتأثر من جـراء تقليص زمن النشاط الحرج critical activity التي تم اختياره من خطوة 2.

نلاحظ أن $FF_{3-4} = 1$ و $FF_{4-5} = 5$ أما الوقت الفائض للأنشطة الأخرى الغير حرجة مساوية إلى الصفر كما هو واضح من شكل (13).

Step 4:

نقلص النشاط (2 , 1) إلى أن نصـل إلى crash time أو مـا يسـمى بــcrash duration لـذلك النشاط، وحسب القاعدة التالية:

$$(activity)\underset{1,2}{Min}\left\{ FF_{(i,j)} \quad , \quad normal \quad duration \ - \ crash \quad duration \right\}$$

فنختار أصغر رقم ما بين الوقت الحر للأنشطة الغـير حرجـة ومـا بـين وقـت تقلـيص النشـاط الحرج إذن:

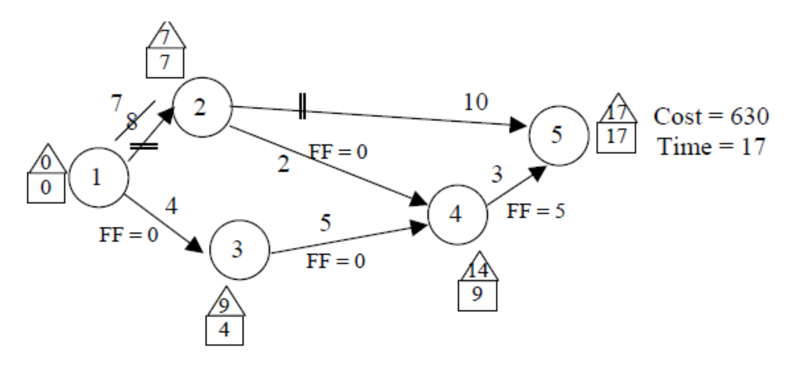
$$\underset{1,2}{Min}\left\{ FF=1 \ , \ FF=5 \ , \ (8-6) \right\} \ = \ 1$$

هذا يعني نقلص النشاط (2 , 1) يوم واحد فقط حسب القاعدة فنحصل على شـبكة جديـدة فنحسب FF لكل الأنشطة من جديد (احتمال الحصول على أكثر من مسار حـرج للشـبكة CPM) ثـم يتم حساب الكلفة الجديدة لها وكما يلي:

الكلفة الجديدة = الكلفة القديمة + فترة التقليص × ميل النشاط الحرج المخفض

New cost = 580 + 50 (18 – 17) = 630

وكما هو واضح في شكل (14):



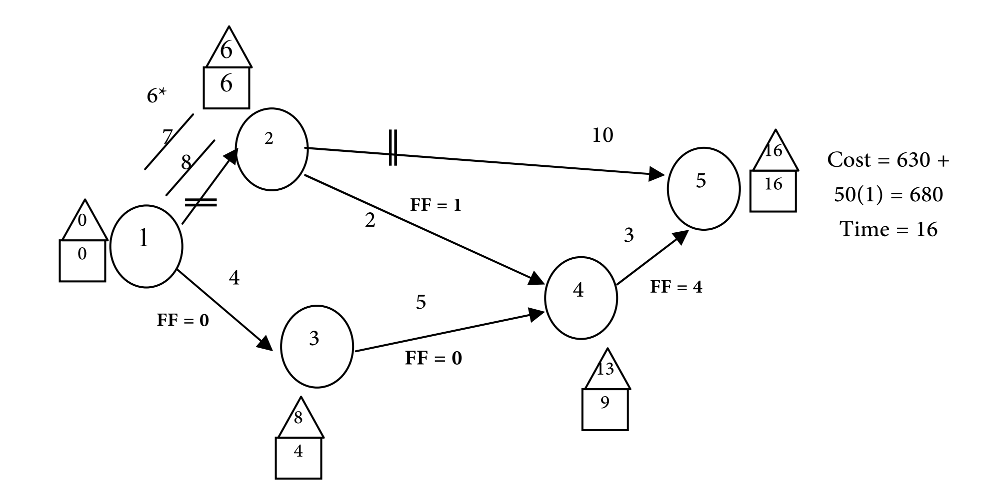
شكل رقم (14) الدورة الأولى للشبكة بعد التقليص

وبتكرار الخطوات السابقة للشكل (14) إذا كانت هناك أنشطة حرجة قابلة لتقليص أزمنتها، أما إذا كان الجواب لا نتوقف ويكون الجواب النهائي. ففي مثالنا أعلاه انتهت الدورة الأولى وبما أن هناك أنشطة حرجة قابلة للتقليص ننتقل إلى الدورة الثانية.

الدورة الثانية:

في شكل (14) نلاحظ أن المسار الحرج CPM لم يتغير وكذلك النشاط (1,2) لم يصل إلى crash time هذا يعني يمكن تقليصه مرة ثانية إلى أن نصل إلى crashtime وهذا يتطلب وحدة واحدة أخرى في مثل هذه الحالة لا داعي للنظر إلى FF_{ij} المقابلة للنشاط.

نبدأ بعملية تقليص النشاط (2 , 1) بمقدار يوم واحد آخر وبدون التأثير على الوقت الحرج لأن جميع الأوقات FF للأنشطة الغير حرجة مساوية إلى صفر. وكما هو واضح في شكل (15) وبكلفة جديدة ووقت إنجاز جديد.



شكل رقم (15) بكلفة جديدة وزمن إنجاز جديد

من شكل (15) نلاحظ أن النشاط (2 , 1) لا يجوز تقليصه أكثر من (*)6 لأنه وصل إلى crash time هذا يعني جاء دور النشاط (5 , 2). وأخيراً الدورة الثالثة للتقليص.

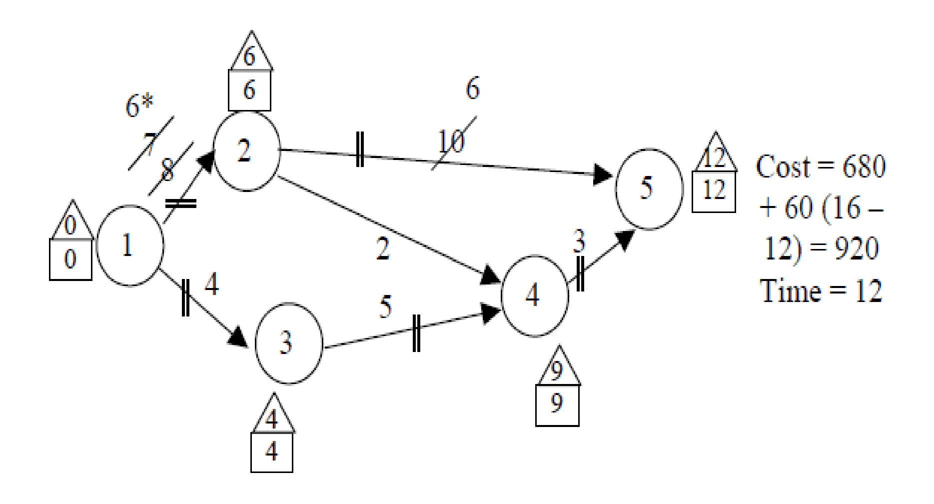
لدورة الثالثة:

نبدأ الآن بتقليص النشاط (5 , 2) وباستخدام القاعدة:

$$\underset{2,5}{Min}\left\{ FF = 4 \ \ , \ \ (10-5) \right\} \ = \ 4$$

هذا يعني نقلص النشاط أربعة أيام كما في شكل (16) حيث يبين الفترة الزمنية للإنجاز مع كلفة الإنجاز. لكن يمكن ملاحظة ما يلي ظهور أكثر من نشاط حرج واحد.

(*) Signifies that activity has reached its chrash time.

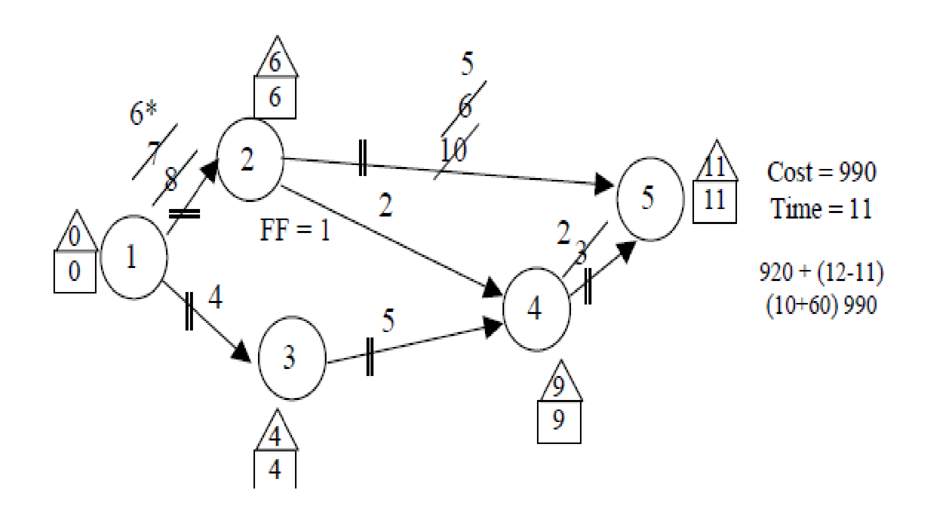


شكل رقم (16)

CPM (1) = 1 , 2 , 5 = 12
CPM (2) = 1 , 3 , 4 , 5 = 12 } Time

الدورة الرابعة:

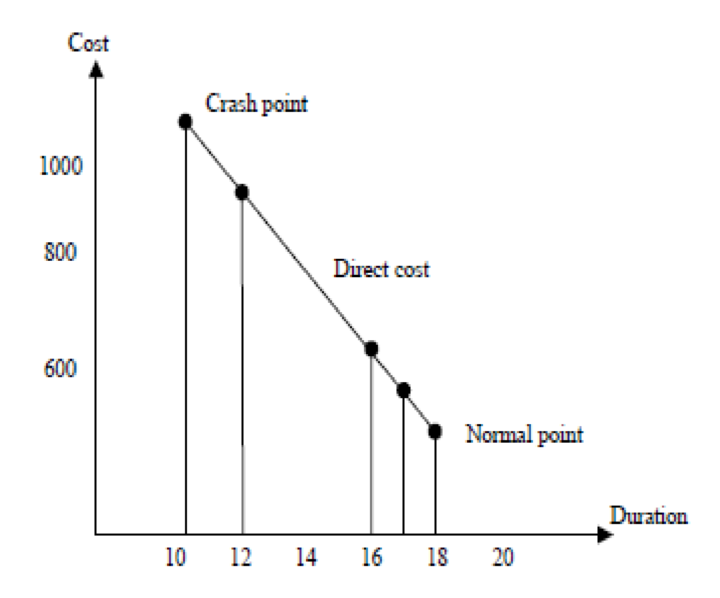
من نهاية الـدورة الثالثـة حصـلنا عـلى مسـارين حـرجين وهـما CPM_1 و CPM_2 ونلاحـظ أن النشاط (4 , 5) يقابل أصغر ميل وأن وقت التقليص لهذا النشاط crashtime مسـاوية إلى (2) وحـدة لذا فإن القيمة القصوى crashtime إلى المسارين هو تقلـيص النشـاط (1 , 2) بيـوم واحـد وأن Free Float قد تحدد لهذه الحالة وبأخذ Minimum إلى FF وبأخذ بنظر الاعتبار المسـارين الحـرجين كـل على حدة وبما أن النشاط (2 , 5) يحتاج إلى يوم واحد لتقليصه ليصل إلى crash time وبدون الحاجـة لحساب FF ولكن هنا قسمت الوحدات على المسارين بحيث يتم الحفاظ عليهما دون تـأثير عـلى FF وكما هو واضح في شكل (17):



شكل رقم (17)

من شكل (17) نلاحظ أن الشبكة الأخيرة تم الحفاظ على أحد المسارين الحرجين واحد من هذه المسارات الحرجة لا زال فيها مجال التقليص ولكن أي عملية تقليص أخرى سوف لن تقلل من زمن الإنجاز الكلي للمشروع لأن CPM_1 جميع أنشطته قد وصلت إلى قيمتها القصوى ولا توجد إمكانية التقليص في أزمنتها وأي تقليص آخر يؤدي فقط إلى زيادة الكلفة. لذا يجب التوقف وأن فترة الإنجاز هي 11 يوم وبكلفة 990 وهذه الكلفة بالتأكيد هي أقل من الكلفة في عمود crach cost والتي تساوي 1340.

والشكل التالي يوضح فيها الكلفة المباشرة direct cost للمشروع. وبإضافة الكلفة الغير مباشرة indirect cost المناظرة لكل نشاط والتي يمكن أن تحسب أو تتوصل إلى أقل كلفة إجمالية total minimum cost (Optimum).



شكل (18) ملخص لعملية التقليص

أسئلة الفصل الخامس

1- Develop a network diagram for the following table list of seven activities together with their sequeuce, requirement these seven activities makeup a complete project:

Activity	Immediate predecessors
A	-
B	A
C	A
D	B
E	C
F	D , E
G	f

2- Consider a project consisting of nine jobs A , B … I with the following precedence relation and time estimates.

Job	Predecessor	Time (day
A	-	15
B	-	10
C	A , B	10
D	A , B	10
E	B	5
F	D , E	5
G	C , F	20
H	D , E	10
I	G , H	15

Draw the project network and then find the critical path and explain its significance.

3- Draw a network for the following activities:

Activity	Predecessor (s)
A	-
B	A
C	A
D	C
E	C

F	C
G	D , E , F
H	G
I	H
J	H
K	I , J
L	K
M	L
N	L
O	B , M , N

4- Given the following data for the man power requirements are specified for various activity of projects:

Activity	Number of men
1 , 2	5
1 , 4	4
1 , 5	3
2 , 3	1
2 , 5	2
2 , 6	3
3 , 4	7
3 , 6	9
4 , 6	1
4 , 7	10
5 , 6	4
5 , 7	5
6 , 7	2

Find the minimum number of men required during scheduling the project.

5- Given the following data for direct costs of normal and crash duration. Find the different minimum cost schedules between the normal and crash points:

Activity	Normal		Crash	
	Duration	Cost	Duration	Cost
1-2	4	100	1	400
1-3	8	400	5	640

1-4	9	120	6	180
1-6	3	20	1	60
2-3	5	60	3	100
2-5	9	210	7	270
3-4	12	400	8	800
3-7	14	120	12	140
4-5	15	500	10	750
4-7	10	200	6	220
5-6	11	160	8	240
5-7	8	70	5	110
6-7	10	100	2	180

6- Give the following time-cost table:

Activity	Normal		Crash	
	Duration	Cost	Duration	Cost
1 , 2	2	8	1	14
1 , 3	4	10	2	20
1 , 4	5	10	3	18
2 , 4	1	5	1	5
2 , 5	5	15	3	21
3 , 4	4	20	3	30
3 , 5	6	12	4	16
4 , 5	3	9	2	16

Compute the different minimum cost – schedules that can occur between the normal and crash times.

7- Suppose that for agiven project we have the following information:

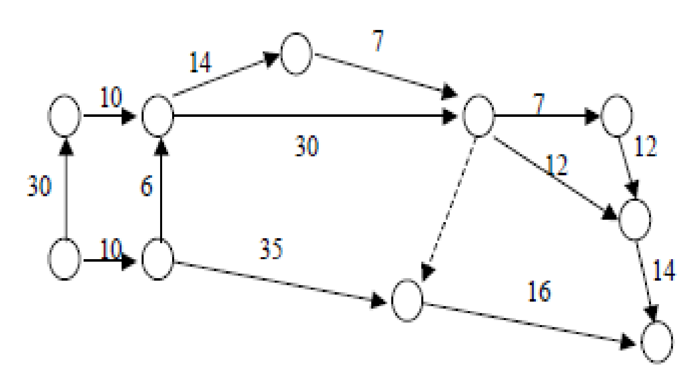
Activity	a	b	m
1 , 2	1	9	5
1 , 3	2	4	3
2 , 3	1	3	2
2 , 5	2	6	4
3 , 4	4	6	5
4 , 5	3	5	4
4 , 6	4	8	6
5 , 6	2	8	5

1- Draw a netwok.

2- Find the expected duration and the variance for each activity.

3- Find P ($\mu_6 \leq 19$)

8- Label the following network and find critical path, the duration of the jobs are in day:



9- The following table list a set of activity together with their duration:

Activity	Duration
1-2	2
1-3	3
2-4	2
3-4	3
3-5	2
4-5	0
4-6	3
4-7	2
5-6	7
6-7	2

Find:

1- Draw a network.

2- How long will it take to complete this project.

3- Can activity 3-4 delayed.

الفصل السادس

نظرية المباراة

Game Theory

الفصل السادس

نظرية المباراة

Game Theory

6-1 Introduction:

Game theory deals with decision situation in which two intelligent opponents have conflicting objectives. In a game conflict, two opponents, known as players, will each have a (finite or infinite) number of choices or strategies. The outcomes or payoffs of a game are summarized as functions of the different strategies for each player. (that one player pays to the other). A game with two players, where again of one player equals a loss to the other, is known as two-Person Zero- sum game. In such game it suffices to summarize the game in terms of the pay off to one player. Designating the two players as A and B with M and N strategies, respectively, the game is usually represented by the pay off matrices to player A as:

	B_1	B_2	....	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

The representation indicates that if A uses strategy i and B uses strategy j, the payoff to A is aij, which means that the payoff to B is aij.

The optimal solution selects one or more strategies for each player such that any changes in chosen strategies does not improve the payoff to either player. These solution can be in the form of single pure strategy or several strategies mixed according to predetermined probabilities.

المقدمة:

جميعنا يعرف ماذا تعني كلمة "مباراة"، إنها بصورة أساسية تعني المنافسة النشيطة بين جهتين أو أكثر وفقاً إلى قاعدة محددة مسبقاً.

تطورت نظرية المباريات Game Theory خلال الحرب العالمية الأولى وفي عام 1921 والمستخدمة من قبل العالم الفرنسي EMILE BOREL (بوريل) وبعد ذلك تطورت النظرية تطوراً سريعاً بعد الحرب العالمية الثانية خصوصاً بعد أن تم التوصل إلى مفهوم البرمجة الخطية من قبل العالم Dantzig حيث برهن العالم Von Neuman في سنة 1928 أسس نظرية المباريات والتي تسمى بنظرية(Minimax) واشترك في برهنة وتحليل كثير من جوانب نظرية المباريات العالمان Oskav Morganstem, Von Heumann وخصوصاً في المجالات العسكرية والمجالات المدنية على مستوى الشركات أو على مستوى الأفراد وتستخدم نظرية المباريات في حالات تحليل المراهنات والمنافسة بين جهتين مختلفتين كل منهما تتمتع بحرية اختيار الأسلوب والاستراتيجية التي تدعى أنها تؤدي إلى نتائج جيدة لها، وتتطلب في كثير من الأحيان اتخاذ قرار معين ولكن الظروف المحيطة بالمشكلة تكون غامضة وغير واضحة مما يؤدي إلى أن تكون عملية اتخاذ القرار صعبة، فمثلاً الحملات الإعلامية أو التخطيط لإستراتيجيات الحرب لمواجهة العدد أو ما شابه ذلك، فإن مشاكل المباريات هي عبارة عن دراسة للإستراتيجيات في جو تتسم فيه ظروف المنافسة ستسمى العناصر المتنافسة التي تشكل طرفي المشكلة بالخصوم Opponent حيث أن كل خصم يحاول التأكيد على قراره وتعظيمه Optimize his own decision على حساب خسارة الخصم الآخر وبذلك فإن قراراته ستؤثر على قيمة ما يحققه الخصم الآخر من عائد وهناك بعض المصطلحات والتي استخدمت في نظرية المباريات لا بد من الإشارة إليها قبل الدخول في تفاصيل النظرية:

اللاعب Player:

كما ذكرنا سابقاً أن العناصر المتنافسة يطلق عليها بالخصوم Opponents حيث أن كل خصم يشكل أحد طرفي المباريات لذا ستطلق على الخصم باللاعب Player أو الذي له دور مهم في عملية اتخاذ القرار عن طريق تحديد الاستراتيجية المناسبة له.

الاستراتيجية Strategy:

أمام كل لاعب Player مجموعة من الخيارات Choices محددة أو غير محددة ويطلق على هذه الخيارات بالاستراتيجيات Strategies التي من خلالها تتم المفاضلة لاتخاذ القرار الصائب الذي يزيد من أرباحه (عوائده) Profits.

مصفوفة الدفع Payoff Matrix:

وهي عبارة عن مصفوفة Matrix ذات صفوف Rows وأعمدة Columns عناصرها Elements تمثل النتائج Out-Comes التي يحصل عليها كل لاعب نتيجة لتطبيقه لمختلف الاستراتيجيات المتوفرة لديه، ويتم تمثيل تلك النتائج (ربح أو خسارة) Gain or Loss بدلالة ما يحصل عليه أحد اللاعبين وتمثل المصفوفة اعتيادياً بدلالة النتائج التي يحصل عليها اللاعب الأول والتي تمثل في عناصر صفوف المصفوفة.

يوزع اللاعبون على طرفي المصفوفة (الصفوف والأعمدة) فتكون العناصر التي تقع على صفوف المصفوفة تمثل ما يربحه اللاعب الأول من اللاعب الثاني، أما العناصر التي تقع على أعمدة المصفوفة فإنها تمثل ما يخسره اللاعب الثاني للاعب الأول بنتيجة تطبيق مختلف استراتيجياته.

6-2 قواعد المباريات Rules of Games:

1- عدد المشاركين (اللاعبين) في المباريات محدد.

2- لكل لاعب عدد محدد من الاستراتيجيات المتاحة أمامه.

3- لا يتصل اللاعبون بعضهم بالبعض الآخر أي أن ما يختاره اللاعب الأول من استراتيجيته لا يعرف به اللاعب الآخر.

4- قرارات جميع اللاعبين تتخذ في نفس الوقت.

5- كل لاعب يمارس قدراً محدداً من التحكم وعليه أن يستخدم هذا القرار في التحكم بأفضل طريقة ممكنة أي اختيار أفضل استراتيجية بحيث تحقق له أفضل عائد ممكن.

6- قرار كل لاعب يؤثر عليه فيما يحققه من ربح ويؤثر على اللاعب الآخر المشترك في المباراة من ربح فعندما يتخذ اللاعب قراراً يقيد من حرية اللاعب الآخر في اختيار استراتيجياته واللاعب ذاته بدوره مقيد في اتخاذ قراره نتيجة تعرضه للاعب الآخر.

6-3 أنواع المباريات Types of Games:

يمكن تصنيف المباريات إلى مجموعتين:

6-3-1 المجموعة الأولى: المباريات ذات المجموع الصفري Zero-Sum Game

6-3-2 المجموعة الثانية: المباريات ذات المجموع اللاصفري (الاستراتيجيات المفضلة) Non – Zero – Sum Games

6-3-1 المباريات ذات المجموع الصفري Zero – Sum Game:

المباريات ذات المجموع الصفري عبارة عن المباراة التي تجري بين جهتين كل منهما تحاول أن تكون نتائج المباراة لصالحها وأن كل جهة تتمتع بالقدرة على تحديد اختيارها الذي يؤدي إلى تعظيم أرباح تلك الجهة أو تقليل الخسارة، إن ما تربحه جهة معينة تخسره الجهة الثانية.

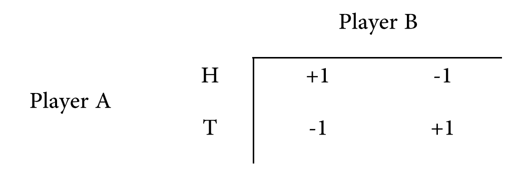
فإن عملية اتخاذ القرار الصحيح تعتمد بشكل كبير على المعلومات المتاحة عن ظروف المشكلة، وتمثل المباراة النهاية القصوى للتخصص في المعلومات

والتي يعمل فيها اللاعبان في جو تسوده المنافسة لذا هناك دقة وتخطيط في اتخاذ القرار الذي من خلاله يحاول اللاعب أن تكون نتائج المباراة لصالحه.

إذا فرضنا أن اللاعب الأول A أما اللاعب الثاني فيتمثل B هذا يعني أن مجموع ما يربحه اللاعب A يساوي ما يخسره اللاعب B لذا فإن الحاصل الكلي يساوي صفر وعليه فإن مصفوفة الدفع Pay off - matrix للاعب B هي نفسها للاعب A ولكن بإشارة معكوسة أن الأسلوب أو المعيار المتبع لعمل مثل هذا النوع من المسائل هو minimax - maximin ففي عبارة Minimax يحاول اللاعب الثاني B اختيار الاستراتيجية التي يحقق بموجبها أقل خسارة ممكنة Best of the worst possible out comes بينما يحاول اللاعب الأول A وبموجب معيار Maximin اختيار الاستراتيجية التي تزيد من ربحه القليل، ويتم الحصول على الحل الأمثل Optimal Solution للمباراة عندما يلاحظ كل اللاعبين أن لا جدوى في تغيير استراتيجيتهم في هذه الحالة تكون المباراة قد استقرت في وضع متوازن Stable or in state of equilibrium والمثال التالي يوضح المعلومات السابقة.

مثال 1:

من المباريات الشائعة هي مباريات رمي قطعة النقد Coins Toos حيث هناك لاعبان B, A عند رمي قطعة النقد متوازنة غير متحيزة Unbiased ولكل لاعب حق اختيار أحد أوجه القطعة والمتمثلة بـ Head and Tail حيث ترمز H للصورة أما T للنقشة (الكتابة) فإذا تطابقت نتائج الرمية الواحدة TT أو HH يربح اللاعب A دينار واحد من اللاعب B وخلافه يربح اللاعب B دينار واحد والجدول رقم (1) يمثل هذه المباراة أن لكل لاعب استراتيجيان (H or T) لذا فإن مصفوفة الدفع تكون ذات حجم 2 x 2 كما موضحة أدناه:



		Player B	
Player A	H	+1	-1
	T	-1	+1

جدول رقم (1)

مصفوفة الدفع لرمي قطعة نقد واحد

نلاحظ هنا Optimal Solution لهذا النوع من اللعب تتطلب من كل لاعب Pure Strategy بالاستراتيجيات الوحيدة (إما H أو T).

لنلاحظ في الجدول رقم (1) إذا لعب اللاعب A الاستراتيجية الأول يربح ما قيمته دينـار واحـد إذا طبق اللاعب B استراتيجية الأول ويخسر دينار واحد إذا ما طبق اللاعب B الاستراتيجية الثانية.

مثال 2:

Consider he following payoff matrix represent player A's gain. The computation of minimax and maximin value are shown on the matrix.

		Player B 1	2	3	4	Row minimum	
Player A	1	8	2	9	5	2	
	2	6	5	7	18	(5)	Maximin
	3	7	3	-4	10	-4	
Column maximin		8	(5) minimax	9	18		

جدول رقم (2)

يحاول اللاعب A والتي تمثل استراتيجياته في الصفوف زيـادة أرباحـه وإنمـا يحـاول اللاعـب B الذي استراتيجياته في الأعمدة تقليل ما يخسره.

فعندما يلعـب اللاعـب A الاسـتراتيجي الأول والتـي يمثلهـا بالصـف الأول مـن مصفوفة الدفع Payoff فإنه سيحصـل عـلى أحـد الأربـاح (8, 2, 9, 5) وذلـك يعتمـد على اسـتراتيجية الأول التـي يختارهـا اللاعـب، أي أن اللاعـب A يـربح 8 وحـدات إذا

طبق اللاعب B استراتيجيته الأولى فإن اللاعب A سيربح على الأقل (Min (8, 2, 9, 5) = 2) بغض النظر عن أي استراتيجية سيتبعها اللاعب B.

أما إذا اختار اللاعب A الاستراتيجية الثانية لمواجهة اللاعب B فإن أفضل ربح سيحصل عليه 18 وحدة إذا اختار اللاعب B الاستراتيجية الرابعة هذا يعني أن اللاعب ِ يربح على الأقل 5 وحدات أي:

Min: (6, 5, 7, 18) = 5

وبهذا يكون اللاعب A متأكداً من استخدامه الاستراتيجية الثانية الخاصة به فإنه سيربح على الأقل 5 وحدات بغض النظر عن أي استراتيجية سيتبعها اللاعب B.

أما إذا لعب اللاعب A الاستراتيجية الثالثة فإنه سيخسر 4 وحدات بغض النظر عن الاستراتيجية المتبعة من قبل اللاعب B

Min: (7, 3, -4, 10) = -4

وبالرجوع إلى الجدول رقم (2) نلاحظ أن القيمة الدنيا لكل صف Row Minimum في المصفوفة تمثل أدنى ربح من المؤكد أن يحصل عليه اللاعب A عند تطبيقه الاستراتيجيات المتاحة له (لاحظ العمود المسمى Row Minimum وكما ذكرنا سابقاً أن هدف A هو تحقيق أو يحاول زيادة ربحه (الدنيا)، لذا فإن عمود Row Minimum يختار اللاعب A الاستراتيجية الثانية والتي بموجبها يحصل على أفضل ربح وقدره 5 وحدات.

Max [(Min: 2, 5, -4)] = 5

ويسمى الاستراتيجية التي وقع عليها الاختبار Maximin strategy والربح الذي تم الحصول عليه في هذه الاستراتيجية بالربح أو القيمة الدنيا للمباراة lower value of the game.

فإذا نظرنا إلى المباراة من وجهة نظر اللاعب B الذي يحاول باستمرار تقليل خسائره حيث يدرك اللاعب B بأنه إذا اختار الاستراتيجية الأولى ليواجه بها فقط اللاعب A لا يخسر أكثر من 8 وحدات بغض النظر عن أي استراتيجية سيلعب بها اللاعب A:

Max (8 , 6 , 7) = 8

أما إذا انتقل إلى الاستراتيجية الثانية لمواجهة اللاعب A فإن أعظم خسارة سيتحملها هي 5 وحدات في حالة اختار اللاعب A الاستراتيجية الثانية:

Max (2 , 5 , 3) = 5

أما إذا لعب اللاعب B الاستراتيجية الأخيرة ستكلفه خسارة مقدار 18 وحدة وهي أكبر خسارة إذا لعب اللاعب A الاستراتيجية الثانية:

Max (5 , 18 , 10) = 18

فإن اللاعب B سيحاول أن يقلل من خسائره لذا فإن أفضل استراتيجية له هي تلك التي تناظر أدنى خسائر أي:

Min {Max (8 , 5 , 9 , 18)}= 5

وبموجب المثال فإن خسارة اللاعب B التي يتحملها تمثل الحد الأعلى (القيمة العظمى) للمباراة upper value or minimax value، ومن الجدير بالذكر أن القيمة العليا للمباراة upper value (Minimax value) تكون أكبر من أو تساوي القيمة الدنيا للمباراة Lower value (Maximin value)

Minimax value $\geq$ Maximin value

ولكن بالرجوع إلى المثال نلاحظ أن:

Minimax value = Maximin value

هذا يعني أن المباراة امتلكتها خاصية التساوي أي أن اللاعب A اختار أفضل استراتيجية له هي الثانية والتي حصل من خلالها على ربح قدره 5 وحدات وبالمقابل خسر اللاعب B ما قيمته 5 وحدات نتيجة اختياره الاستراتيجية الثانية أي أن القيمة العليا للمباراة قد تساوت مع القيمة الدنيا للمباراة. وهذا ما يقال عنها نقطة الارتكاز(استقرار) Saddle point أي هناك نقطة ارتكز عليها اللاعبان A و B ولا يحاول أي منها تغييرها لأنه من خلالها حصل كلا اللاعبين على أفضل النتائج وبالتالي فإن هذه النقطة تمثل نتيجة المباراة (Value of the game) ويرمز لها V.

لاحظ أن الصف الثاني تمثل الاستراتيجية للاعب A أما العمود الثاني يمثل الاستراتيجية للاعب B فإن نقطة الارتكاز الاستقرار (2 , 2) والتي استقر عندها كلا اللاعبين وتدعى كلا الاستراتيجيتين بالاستراتيجيات المثلى Optimal

strategies هنا اللاعبين لا يحاولان تغيير استراتجيتهما لأن أي انحراف عن نقطة الارتكـاز سـيقلل مـن ربحية اللاعب A ويزيد من خسارة اللاعـب B. فـإذا حـاول أحـدهما تغيـير اسـتراتيجيته فـإن بإمكـان اللاعب الآخر اختيار استراتيجية أفضل من استراتيجيته الحالية يحصـل مـن خلالهـا عـلى نتـائج أفضـل ولكن على حساب اللاعب الأول.

6-3-2 الاستراتيجيات المفضلة Dominated Strategies:

إن مفهوم الاستراتيجيات المفضلة (المسيطرة) تعني اختـزال مصـفوفة الـدفع Pay off matrix إلى مصفوفة ذات حجم أقل يسهل علينا كثيراً من الجهد الرياضي ويقلل الوقت اللازم لمعالجـة المبـاراة وتحت ظروف معينة يمكن أن تختصر حجم المصـفوفة المعطـاة إلى حجـم أصـغر منـه عنـدما تتحقـق الشروط التالية:

1- الصفوف Rows:

تمثل استراتيجيات اللاعـب الأول A بصـفوف مصـفوفة الـدفع فبالإمكـان حـذف الصـف ذات المردود السيئ أو ذات الربح القليل عند مقارنتها مع الاستراتيجيات (الصفوف) الأخـرى بشرط أن تـتم المقارنة للقيم المتناظرة لكلا الاستراتيجيتين الصفين وكما يلي:

يفضل الصف i على الصف k في مصفوفة الدفع إذا تحقق الشرط التالي:

$$a_{ij} \geq a_{kj}$$

$$i = 1 , ... m$$

$$j = 1 , ... n$$

علماً بأن k تمثل رقم صف محدود، تتم مقارنته مع الصف i

وإن $i = 1 , ... m$ والمثال التالي يوضح شرط الصف كما يلي:

مثال (3):

Consider the following (3 × 3) game:

		Player B		
		1	2	3
	1	1	-1	7
Player A	2	-3	0	3
	3	2	1	5

Solution:

بإمكان اللاعب A حذف الاستراتيجية الثانية وعدم أخذها بنظر الاعتبار في مراحل التقييم اللاحقة للاستراتيجيات المتاحة له لأن كل قيمة من قيم الاستراتيجية الثانية أقل من القيم المناظرة لها في الاستراتيجية الثالثة:

أي أن (5 > 3 , 1 > 0 , 2 > 3-)

وبهذا يختزل حجم المصفوفة أعلاه إلى مصفوفة ذات حجم (3 × 2) ويمكن التعبير عن ذلك بأسلوب آخر. إذا كانت الأرباح المتحققة لصف ما من الصفوف أكبر من الأرباح المناظرة لأي صف آخر في نفس المصفوفة فيكون الصف الأول أفضل من الصف الآخر ولا حاجة للاعتماد على الصف الآخر last row ما دام هناك صف row أفضل منه في أرباحه.

والجدول التالي يوضح عملية الاختزال:

		Player B		
		1	2	3
Player A	1	1	-1	7
	2	2	1	5

جدول رقم (3)

2- الأعمدة Columns:

أما بالنسبة إلى استراتيجيات اللاعب B والذي تمثل أعمدة المصفوفة، الاستراتيجيات المتاحة له فهي حذف العمود (استراتيجي ذي الخسارة الكبيرة) عند

مقارنتها مع إحدى الاستراتيجيات (الأعمدة) Columns الأخرى بشرط أن تتم المقارنة للقيم المناظرة لكلا الاستراتيجيتين (العمودين).

يفضل العمود k على العمود j في مصفوفة الدفع pay off matrix عندما يتحقق الشرط التالي:

$$a_{ij} \geq a_{ik}$$

$$i = 1 , \ldots . m$$

$$j = 1 , \ldots . n$$

بحذف العمود j من أية اعتبارات أخرى لأن اللاعب B يحاول تقليل خسائره.

بالعودة إلى مثالنا السابق نلاحظ أن اللاعب B إذا كانت لديه استراتيجية تكون فيها تساوي أو أكبر من القيم المناظرة لأية استراتيجية أخرى من استراتيجياته فباستطاعته حذف تلك الاستراتيجية فإن j تمثل العمود الثالث ويتم حذفه بسبب سيطرة الاستراتيجية الأولى عليها:

$(7 > 1 , 3 > -3 , 5 > 2)$

وبهذا يختزل حجم المصفوفة أعلاه إلى مصفوفة جديدة ذات حجم (2 × 2) كما مبين أدناه علماً بأن صفوفها تمثل الاستراتيجية الأولى والثالثة للاعب A وأعمدتها تمثل الاستراتيجية الأولى والثانية للاعب B:

		Player B	
		1	2
Player A	1	1	-1
	2	2	1

نلاحظ أن اللاعب B حذف العمود الثالث من أي اعتبارات لا سيما أنه يحاول تقليل خسائره قدر الإمكان.

ويلاحظ أن الشرط أعلاه يتحقق عند مقارنة عناصر العمود الثالث بالعناصر المناظرة لها في العمود الأول أي أن العمود الأول قد سيطر على العمود الثالث لأن خسائر عناصر العمود الأول أقل من الخسائر لعناصر العمود الثالث. وبما أن

اللاعب B يحاول دائماً تقليل خسائره فبإمكانه حذف العمود الثالث من حساباته كما وضحنا أعلاه.

6-4 الاستراتيجيات المختلطة Mixed Strategies:

بينا سابقاً أن المباراة تتصف بوجود نقطة استقرار Saddle point ومن خلال تلك النقطة تم تحديد الاستراتيجيات الحرة puer strategies والقيمة المثلى للمباراة optimal value لكن عندما لا تكون هناك نقطة استقرار في المشكلة أو في المباراة أو يصعب الحصول على نقطة استقرار saddle point ففي هذه الحالة لا يتحقق الشرط التالي:

$$\underset{i}{Max}\ \underset{j}{Min}\ (aij) \neq \underset{j}{Min}\ \underset{i}{Max}\ (aij)$$

فهذا يعني محاولة إيجاد أسلوب آخر لأجل الحصول على حل للمباراة. وهذا ما يطلق عليه بالاستراتيجيات المختلطة (Mixed-strategies) إن في حالة وجود نقطة استقرار saddle يكون باحتمال يساوي واحد. بينما في حالة الاستراتيجية المختلطة يتم اختيار الاستراتيجية المعينة باحتمال معين يحدد عند حل المباراة أو المشكلة.

إن الاستراتيجيات المختلطة هي عبارة عن أسلوب اختيار أكثر من استراتيجية واحدة وباحتمالات مختلفة للحصول على نتائج مفضلة فإن قيمة المباراة تقع بين الحد الأعلى للمباراة Upper value of the game وبين الحد الأدنى للمباراة Lower value of the game.

قيمة الحد الأعلى للمباراة $\leq$ قيمة المباراة V $\leq$ قيمة الحد الأدنى للمباراة

Lower value of the game $\leq$ value of the game (V) $\leq$ upper value of the game

ومن العلاقة نلاحظ لا يمكن الاعتماد على الاستراتيجيات الحرة السابقة لغرض إيجاد الحل الأمثل للمباراة وهذا صحيح ما دام بإمكان أي لاعب تحسين

نتائجه باختيار استراتيجيات أخرى بموجب احتمالات يحددها اللاعب مسبقاً بدلاً من أن يلعب بموجب استراتيجية حرة واحدة.

أما طريقة لعب الاستراتيجيات المختلطة Mixed-strategy ذلك بفرض أن row probability هي $(x_1 , x_2 , \dots , x_m)$ و column probability هي $(y_1 , y_2 , \dots , y_n)$ هي الاحتمالات التي بموجبها يستطيع اللاعبين A و B اختيار استراتيجياتهم الحرة pure strategies بشرط أن يكون:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = \sum_{j=1}^{n} Y_j = 1$$

$$X_i , Y_j \geq 0 \text{ for all i and j}$$

فإن a_{ij} تمثل عناصر (i , j) لمصفوفة اللعب game matrix وأن X_i و Y_j يمكن تمثيلها كما يلي في المصفوفة:

		B			
		Y_1	Y_2	…	Y_n
	X_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	X_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	.	.	.		.
A	.	.	.		.
	.	.	.		.
	X_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

فإن حل المباراة المختلطة يعتمد أيضاً على مبدأ Minimax إلا أن الفرق هو أن اللاعب A سيحدد الاحتمالية X_i للاستراتيجية التي من المتوقع أن تعظم من ربحه القليل. وكذلك اللاعب B سيحدد مسبقاً الاحتمالية Y_j للاستراتيجية التي سيختارها والتي من المتوقع أن تقلل من خسارته. أي أن كلاً من اللاعبين ينسبان أوزاناً (نسب) معينة للاستراتيجية المتاحة لديهم وبالتالي يتم تحديد الاستراتيجية التي من المتوقع أن يحصلوا بموجبها على أفضل العوائد. ويمكننا صياغة قاعدة MinMax وباختيار للاستراتيجيات المختلطة كالآتي:

فإن اللاعب A يختار X_i $(X_1, X_2 \dots X_m)$, $X_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{m} X_i = 1$ هذا يعني أن اللاعب A يحاول أن يزيد من أرباحه Maximum كالآتي:

$$\underset{xi}{Max}\left\{ Min(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_1, \dots \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i) \right\}$$

أما بالنسبة إلى اللاعب B يختار Y_j $\left\{ Y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} Y_j = 1 \right\}$ فهو يحاول أن يقلل من خسائره لذا فمبدأ Minimax له يكون:

$$\underset{yj}{Min}\left\{ Max(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \dots \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) \right\}$$

وهذه القيمة تبين لنا Maximin و Minimax للقيمة المتوقعة expected payoffs كما كان في حالة الاستراتيجيات الموحدة pure strategies

Minimax expected payoff $\geq$ Maximin expected payoff

القيمة المتوقعة Minimax $\geq$ القيمة المتوقعة Maximin

ففي حالة تساوي طرفي المتباينة أعلاه نكون قد حصلنا على الحل الأمثل للمباراة V^* وتكون قيمة كل من X_i^* و Y_j^* مثلى وكذلك تمثل القيمة المتوقعة (a_{ij}) تمثل القيمة المثلى المتوقعة للمباراة V^* والتي تساوي:

$$V^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^*$$

علماً بأن x_i^* و y_j^* يمثلان الاحتمالين الأمثلين و a_{ij} تمثل قيمة أحد عناصر مصفوفة الدفع التي تقابل الاحتمالين الأمثلين x_i^* و y_j^*.

وهناك طرق متعددة لحل مباراة من نوع Two-person zero - sum games لحساب القيم المثلى لكل من x_i^* و y_j^*.

هناك طرق كثيرة متبعة لمعالجة مثل هذا النوع من المباريات إلا أننا سنتطرق إلى اثنين منها وهي:

1- طريقة الرسم البياني Graphical Method.

2- طريقة البرمجة الخطية Linear programming Method.

6-4-1 طريقة الرسم البياني Graphical Method:

وتعتبر هذه الطريقة (الرسم البياني Graphical method) من أبسط الطرق المتبعة لإيجاد الحل للمباراة ذات الاستراتيجيات المختلفة Mixed strategies التي يمكن استخلاص واستنتاج النتائج النهائية من الرسم وبشكل سهل. وعند تطبيق أسلوب الرسم يجب مراعاة ما يلي:

1- يجب أن يكون لأحد اللاعبين استراتيجيتان متاحة فقط أي يكون حجم مصفوفة الدفع من أبعاد $(2 \times n)$ أو $(m \times 2)$.

2- يجب أن لا تتوفر في المباراة نقطة saddle point (استقرار) فإذا كان هناك نقطة استقرار فيمكن إيجاد الحل مباشرةً دون اللجوء إلى أسلوب الرسم، لأن saddle point هي القيمة المثلى للمباراة.

الحالة الأولى: إذا كانت مصفوفة الدفع من نوع $(2 \times n)$:

		Playuer B			
		Y_1	Y_2	…	Y_n
Player	X_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A	X_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

نفرض أن لهذه المباراة لا توجد نقطة استقرار no-saddle point.

وبما أن اللاعب A لديه استراتيجيتان والاحتمالين $x_1 \geq 0$ أو $x_2 \geq 0$ وأن اللاعب A يحاول أن يزيد أرباحه فإذا كان:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 = 1 - x_1$$

فإن النتائج المتوقعة للاعب A فيما إذا طبق اللاعب B استراتيجياته الحرة pure strategy كالآتي:

B's pure strategy	A's Expected payoff
1	$(a_{11} - a_{21})\ x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})\ x_1 + a_{22}$
.	
.	
.	
n	$(a_{1n} - a_{2n})\ x_1 + a_{2n}$

يتضح من الجدول أن القيم المتوقعة للاعب A A's expected payoff تتغير خطياً مع قيم x_1 أي أن هناك علاقة خطية تبين قيم x_1 والنتائج المتوقعة للاعب A. ووفقاً لمبدأ Maximin فإن اللاعب A سيختار x_1 التي تزيد من ربحه المتوقع والمثال التالي يبين عمل المباراة بأسلوب بياني.

مثال (5):

Consider the following (2 × 4) game:

		B			
		1	2	3	4
A	1	2	2	3	-1
	2	4	3	2	6

Solution:

أولاً: يجب التأكد من أن المصفوفة لا تتوفر فيها نقطة الاستقرار saddle point.

ثانياً: يتم حساب القيم المتوقعة للاعب A عندما يطبق B مختلف استراتيجياته الحرة له حسب الجدول أدناه:

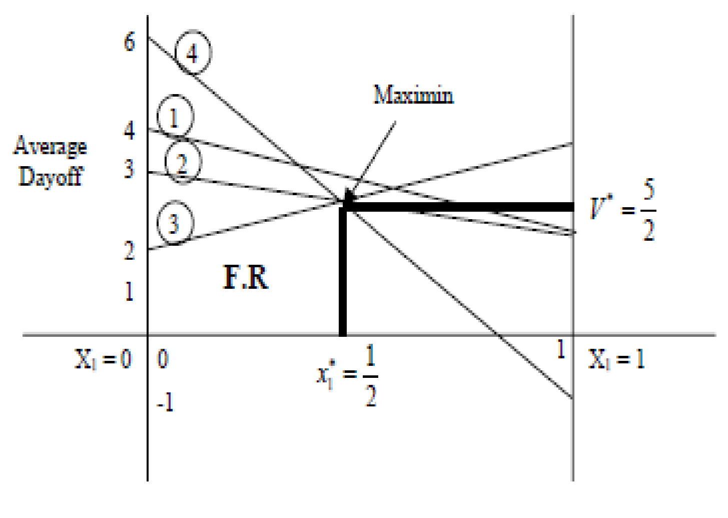
حيث:

X_1 = احتمال الصف الأول

X_2 = احتمال الصف الثاني

B's pure strategy	A's Expected payoff
1	$2x_1 + 4x_2 = -2x_1 + 4$
2	$2x_1 + 3x_2 = -x_1 + 3$
3	$3x_1 + 2x_2 = x_1 + 2$
4	$-x_1 + 6x_2 = -7x_1 + 6$

ثالثاً: نبدأ بعملية الرسم وذلك برسم المحور الأفقي (محور الاحتمالات) والذي يتراوح مجال القيم عليه بين الصفر والواحد لأن مجموع الاحتمالات يساوي واحد $(x_1 + x_2) \leq 1$ فيتم رسم المحورين العموديين (محور القيم المتوقعة) ويقسمان إلى وحدات ذات قيم معينة حسب طبيعة المسألة. والرسم التالي يبين المستقيمات الأربعة للمعادلات الخطية الموجودة في الجدول أعلاه:



شكل رقم (1)

نلاحظ بعد رسم المستقيمات الأربعة نلاحظ أن $x_1^* = \frac{1}{2}$ وهذه تمثل نقطة تقاطع المستقيمات (4 , 3 , 2) هذا يعني أن $x_2^* = \frac{1}{2}$ أيضاً لأن $x_1 + x_2 = 1$ أما قيمة المباراة V^* يتم بالتعويض عن قيمة x_1^* في المعادلة عند نقطة تقاطع المستقيمات وكما يلي:

$$V^* = \begin{cases} -\frac{1}{2} \quad +3 \quad = \frac{5}{2} \\ \quad \frac{1}{2} \ + \ \ 2 = \frac{5}{2} \\ -7(\frac{1}{2}) + 6 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

فإن قيمة المباراة المتوقعة تساوي $\frac{5}{2}$ وحـدة علـماً بـأن النقطـة V^* تشـكل نقطـة Maximin للمباراة تم الحصول عليها مـن تقـاطع المسـتقيم الثـاني والثالـث والرابـع معـاً والتـي أعطيـت قيمـة Maximin.

وبهذا فإن أفضل استراتيجيات اللاعب B وذلك بخلط الاستراتيجيات الثلاثة، أي مستقيمين لهما إشارة مختلفة (ميلين متعاكسين يؤلفان حلاً بديلاً) ويمكن التعبير عنهما كما يلي:

(3 , 2) , (4 , 2) , (4 . 3) فيجب إبعـاد المسـتقيمين (4 , 2) لأنهـا قيمـة غـير مـثلى (إشـارتها متشابهة) من جهة أخرى فإن اللاعب B يمكن أن ينافس اللاعب A مـن خـلال الاسـتراتيجيتين (3 , 2) التي شكلت من Maximin للاعب A ولهذا السبب تكون قيمة $Y_1^* = Y_4^* = 0$ لأنهـا غـير مشـتركة في نقطة Maximin وبما أن مجموع الاحتمالات مساوية إلى الواحد فإن:

$y_2 + y_3 = 1$

$y_3 = 1 - y_2$

فالقيمة المتوقعة للاعب B نتيجة اختيار اللاعب A استراتيجياته الحـرة وكـما هـي واضـحة في الجدول أدناه:

A's pure strategy	B's Expected payoff
1	$2y_2 + 3y_3 = -y_2 + 3$
2	$3y_2 + 2y_3 = y_2 + 2$

حيث يمكن تحديد Minimax وذلك من تقاطع المستقيمين أعلاه والتي يتم تحديد قـيم y_2 و y_3 كما يلي:

$$-y_2^* + 3 = y_2^* + 2$$

$$2y_2^+ = 1$$

$$y_2^* = \frac{1}{2}$$

وبتعويض قيمة y_2^* في القيمة المتوقعة للاعب B نجد أن:

$$-\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

وهذه مساوية إلى قيمة V^* فإن:

$$\text{Maximin} = \text{Minimax} = \frac{5}{2}$$

وهكذا يمكن الاستمرار بأخذ المنافسة (4 , 3) بنفس الأسلوب السابق وكما هو واضح أدناه:

A's pure strategy	B's Expected payoff
1	$3y_3 - y_4 = 4y_3 - 1$
2	$2y_3 + 6y_4 = -4y_3 + 6$

وبحل هذه المعادلتين:

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$$

$$y_3^* = \frac{7}{8} \qquad y_4^* = \frac{1}{8}$$

$$V^* = \begin{Bmatrix} 4(\frac{7}{8}) - 1 = \frac{5}{2} \\ -4(\frac{7}{8}) + 6 = \frac{5}{2} \end{Bmatrix} \text{optimal solution}$$

والتي منها نحصل على الحل الأمثل وذلك بخلط ثلاث استراتيجيات

4 ، 3 ، 2، فإن قيم المباراة هي:

$$V^* = \frac{5}{2}$$

$$V^* = \text{Minimax value} = \text{Maximin value} = \frac{5}{2}$$

ملاحظة:

1- اللاعب ذو الاستراتيجيات الأكثر يبدأ باللعب أولاً.

2- أما بالنسبة إلى نقطة الحل الأمثل أخذت على أساس مجال الحل الذي يكون إلى الداخل لأن B هنا يلعب أولاً.

مثال (6):

Consider the following (4 × 2) game:

		B 1	B 2
A	1	2	4
	2	2	3
	3	3	2
	4	-2	6

Solution:

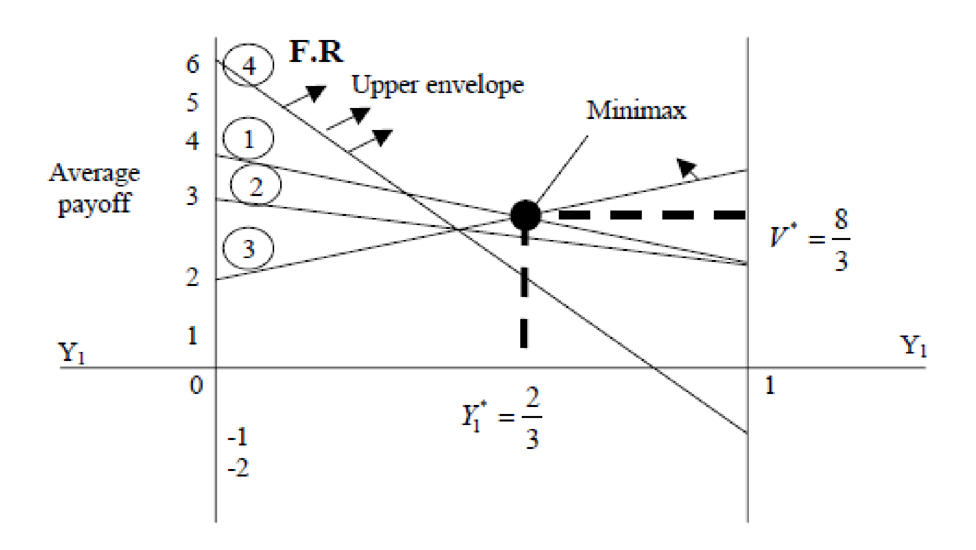
أولاً: ليس لهذه المباراة نقطة saddle point

ثانياً: افرض أن اللاعب B يلعب بالاحتمال y_1 , y_2 حيث أن $y_2 = 1 - y_1$ وهذا ما يسمى بـ B's mixed strategies

ثالثاً: اللاعب A يلعب أولاً لأن لديه أكثر من استراتيجية واحدة فالجدول التالي يبين pure strategy للاعب A وتوقع اللاعب B:

A's pure strategy	B's Expected payoff
1	$2y_1 + 4y_2 = -y_1 + 4$
2	$2y_1 + 3y_2 = -y_1 + 3$
3	$3y_1 + 2y_2 = y_1 + 2$
4	$-2y + 6y_2 = -8y_1 + 6$

رابعاً: هذه المستقيمات الأربعة فقد تم رسمها كما في شكل رقم (2):



شكل رقم (2)

ففي هذه الحالة إن اللاعب A يحاول أن يحقق أكبر ربح أما اللاعب B يحاول تقليل خسـائره لذلك فإن نقطة minimax هي التي تحدد أقل قيمة من upper envelope أو أصغر خسارة ممكنـة تتحقق وبما أن مجال الحل يتغير عن نقطة الأصل أي إلى الأعـلى وأن نقطـة minimax والمتبعـة عـلى الرسم تعطـى أصـغر قيمـة إلى V^* وفي هـذه النقطـة يمكـن حسـاب قيمـة Y_1^* إمـا بحـل المسـتقيمين (الاستراتيجيتين) (3 , 1) فإن $Y_1^* = \frac{2}{3}$ وبذلك فإن $V^* = \frac{8}{3}$ والمتمثلة بقيمة المباراة.

وأن نقطة تقاطع المستقيم تمثل A's pure strategies وهي (3 , 1).

هذا يعني أن قيم كل من x_2 و x_4 تساوي إلى الصفر ($x_2^* = x_4^* = 0$) فإن (x_1 , x_3) أي $x_1 = 1 - x_3$ من خاصية $x_1 + x_3 = 1$ فإن A's average payoff مساوية أو تقابل B's pure strategies.

ويمكــن حســاب قيمــة V^* بــالتعويض عــن قيمــة $y_1^* = \frac{2}{3}$ وأن $y_2^* = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ لــدى الاستراتيجية الأولى والثالثة فنجد قيمة V^* كما يلي:

$$V^* = \begin{cases} -2y_1 + 4 = -2(\frac{2}{3}) + 4 = \frac{8}{3} \\ y_1 + 2 \quad = \frac{2}{3} + 2 \qquad = \frac{8}{3} \end{cases}$$

وبهذا فإن أفضل استراتيجيتين بالنسبة للاعب A هي 1,3 أما اللاعب B فإن أفضل اسـتراتيجية له هو الأول والثاني وباحتمال قدره $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ ليحقق أقل خسارة ممكنة فـإن تنـافس A يكـون بدلالـة الاستراتيجية الأولى والثالثة ليحقق Minimax.

B's pure strategy	A's Expected payoff
1	$2x_1 + 3x_3 = -x_1 + 3$
2	$4x_1 + 2x_3 = 2x_1 + 2$

ويمكن تحديد قيم x وذلك بحل معادلتين:

$$-x_1 + 3 = 2x_1 + 2$$

$$x_1^* = \frac{1}{3} \quad and \quad x_3^* = \frac{2}{3} \quad , \quad x_2^* = x_4^* = 0$$

فإن الحل الأمثل للاعب A يحقق قيمة $V^* = 8/3$ هذا يعني أن:

$$\text{Minimax} = V^* = \text{Maximin} = 8/3$$

6-4-2 طريقة البرمجة الخطية للمباراة من نوع (m × n):

Linear programming method for (m × n) Games

استخدم هذا الأسلوب بعد الحـرب العالميـة الثانيـة أثـر تطـور البرمجـة الخطيـة، أدرك العـالم G.Dantzig أثنـاء توصـله إلى طريقـة السـيمبلكس الاعتياديـة simplex method للبرمجـة الخطيـة حقيقة وجود علاقة وثيقة بين البرمجة الخطية ونظرية المباريات.

وكما علمنا أن الأسلوب المستخدم على نطاق واسع في الحياة العملية هـو أسـلوب البرمجــة الخطيــة حيــث تعطــى نتــائج كفــوءة لإيجــاد الحلــول الخاصــة بنظريــة

المباريات ومهما كان حجم المصفوفة، حيث من الممكن تحويل أي مسألة مباريات إلى صيغة معادلات خطية ثم استخدام إحدى أساليب البرمجة الخطية لمعالجة المباراة والعكس صحيح حيث يمكن تحويل أي مسألة برمجة خطية إلى صيغة مباراة ومن ثم تطبيق إحدى القواعد المتبعة في معالجة المباراة بشكل عام ويستخدم أسلوب البرمجة الخطية بشكل خاص في معالجة البيانات ذات الحجم الكبير فكلما كان حجم مصفوفة الدفع كبيرة فمن المفضل استخدام أسلوب البرمجة الخطية وخصوصاً بعد توفر البرامج الجاهزة المستخدمة في الحاسبات الإلكترونية بشكل كبير لمعالجة مسائل البرمجة الخطية.

بعد دراسة أي مشكلة، يتم وضعها على شكل مصفوفة تسمى payoff matrix. تمثل كل استراتيجية باحتمال معين ثم تتم صياغة مشكلتين من مشكلات البرمجة الخطية وهما النموذج الأول والنموذج المقابل ثم نختار أحد هذين النموذجين لإيجاد الحل، ثم نستنتج نتائج المشكلة الأخرى من النموذج الذي استخدم للحل.

كما وضحنا سابقاً فإنه يمكن التعبير عن قاعدة Maximin للاعب A في حالة الاستراتيجيات المختلطة Mixed strategy بالصيغة الرياضية التالية:

$$\underset{xi}{Max}\left\{Min(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i \ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right\}$$

بشرط أن $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ وكذلك أن x_i يجب أن تكون كما يلي:

$$0 \leq x_i \leq 1$$

$$i = 1 , 2 \ldots , n$$

وفرضنا أن V (Value of the game) تساوي إلى:

$$V^* = \text{Min}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i \ldots \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right\}$$

وأن اللاعب A يحاول دائماً أن يزيد من أرباحه بموجب قاعدة Maximin إذن يمكن صياغة المباراة من وجهة نظر اللاعب A بأسلوب البرمجة الخطية كالآتي:

Maximize $Z = V$

ويطمح اللاعب A دائماً أن يحقق كل استراتيجية من استراتيجياته عائد مساوياً إلى قيمة المباراة (V) أي يطمح إلى زيادة أرباحه إلى أكبر قيمة من قيم المباراة (V) لذلك فإن أي استراتيجية من استراتيجياته يبقى أن تحقق ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq V$$

علماً بأن مجموع الاحتمالات x_i لمجموع الاستراتيجيات يجب أن تساوي واحد، وكل قيمة من قيم x_i يجب أن تكون أكبر أو تساوي صفر ويمكن التخلص من قيمة V وذلك بقسمة الطرفين على (V) بشرط أن $(V > 0)$ أما إذا كانت V سالبة فيجب تغيير اتجاه المتباينة inequalities. وذلك بضرب طرفيها في 1- أما إذا كانت V مساوية إلى الصفر فإن عملية القسمة تكون غير صحيحة. إلا أنه من الممكن معالجة هذه المشكلة عن طريق إضافة كمية ثابتة موجبة إلى جميع عناصر المصفوفة بشرط أن تجعل قيمة المباراة Game value (V) أكبر من الصفر ثم يتم حذف الكمية الثابتة المضافة بعد الحصول على الحل الأمثل للمباراة.

ولغرض توضيح فكرة مصفوفة الدفع وتحويلها إلى مسألة برمجة خطية مألوفة فيجب أن نوضح المصفوفة أولاً وكما يلي:

		Playuer B			
		Y_1	Y_2	…	Y_n
Player A	X_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	X_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	.				
	.				
	.				
	X_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

جدول (3)

مصفوفة الدفع

وأن $x_i = x_1 , x_2 .... x_m$ احتمالات اختيار الاستراتيجيات المتاحة للاعب A هي $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$

$0 \leq x_i \leq 1 \qquad i = 1 , 2 .... m$

أما $y_j = y_1 , y_2 ... y_n$ احتمالات اختيار الاستراتيجيات المتاحة وبحرية تامة للاعب B وأن $0 \leq$ $y_j \leq 1$ حيث $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ فإن قيود النموذج تكون كما يلي:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... a_{m1} x_m \geq V$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... a_{m2} x_m \geq V$$

.....

$$a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + ... a_{mn} x_m \geq V$$

$$\sum x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \text{ for all i}$$

أما دالة الهدف لهذه القيود تكون:

Maximize $\qquad Z = V$

إن الصيغة أعلاه عبارة عن نموذج برمجة خطية Linear programing model للاعب A حيث تستخدم أحد أساليب البرمجة الخطية وبالأخص أسلوب simplex لإيجاد الحل الأمثل للاعب A فإن النموذج أعلاه يتم تبسيطه من خلال إجراء بعض العمليات الحسابية والتي ذكرت سابقاً وذلك بقسمة طرفي المتباينات الرياضية (n + 1) constraints على المقدار V وهذا يكون صحيح إذا كانت $V > 0$ أما إذا V سالب نغير إشارة المتباينة إلى ($\leq$).

لو فرضنا هنا أن $V > 0$ فإن قيود المسألة تكون على الشكل التالي:

$$a_{11} \frac{x_1}{V} + a_{21} \frac{x_2}{V} + ...a_{m1} \frac{x_m}{V} \geq 1$$

$$a_{12} \frac{x_1}{V} + a_{22} \frac{x_2}{V} + ...a_{m2} \frac{x_m}{V} \geq 1$$

.

.

.

.

$$a_{1n} \frac{x_1}{V} + a_{2n} \frac{x_2}{V} + ...a_{mn} \frac{x_m}{V} \geq 1$$

$$\frac{x_1}{V} + \frac{x_2}{V} + ... \frac{x_m}{V} \geq \frac{1}{V}$$

Let $X_i = \frac{x_i}{V}$ i = 1 , 2 … m since

$$\text{Max } V = \min \frac{1}{V} = \min (X_1 + \ldots .. X_m)$$

The problem becomes:

$$\text{Minimize } Z = X_1 + X_2 + \ldots .. X_m$$

Subject to:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots \ldots .. a_{m1} X_m \geq 1$$

$$a_{12} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots \ldots .. a_{m2} X_m \geq 1$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

$$a_{1n} X_1 + a_{2n2} X_2 + \ldots \ldots .. a_{mn} X_m \geq 1$$

$$X_1 , X_2 \ldots \ldots X_m \geq 0$$

أما بالنسبة إلى اللاعب B فإن النموذج الرياضي يكون كالآتي:

$$\min_{yj} \left\{ Max(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j , \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j \ldots .. \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j) \right\}$$

subject to:

$$y_1 + y_2 + \ldots .. y_m = 1$$

$$y_j \geq 0 \qquad i = 1 , 2 , \ldots .. , n$$

وهذه يمكن أن تصاغ على هيئة نموذج خطي كما يلي:

$$\text{Max} \quad w = Y_1 + Y_2 \ldots .. + Y_n$$

Subject to:

$$a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \ldots \ldots .. a_{1n} Y_n \leq 1$$

$$a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 + \ldots \ldots .. a_{2n} Y_n \leq 1$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

$$a_{m1} Y_1 + a_{m2} Y_2 + \ldots \ldots .. a_{mn} Y_n \leq 1$$

$$y_1 , y_2 \ldots \ldots y_n \geq 0$$

wher $w = \frac{1}{V}$ $Y_i = \frac{y_i}{V}$ i = 1 , 2 … n

ويمكن كذلك للاعب B أن يحصل على الحل الأمثل من خلال البرمجة الثنائية (Dual problem for A) للاعب A ويمكن استخدام النموذج أعلاه لإيجاد

الحل الأمثل ومن ملاحظة صيغ البرمجة الخطية لكلا اللاعبين فبإمكان اللاعب B من تطبيق طريقة (simplex) مباشرةً لأن جميع القيود من نوع أقل ويساوي (≤). أي أن منطقة الحلول المناسبة متوفرة (F.R) أما بالنسبة إلى اللاعب A فلغرض الحصول على الحل الأمثل فإنه يحتاج تطبيق طريقة السمبلكس الثنائية dual simplex method لأن جميع القيود أكبر من وتساوي (≥).

إن عملية المفاضلة بين الطريقتين تعتمد على عدد القيود التي تتضمنها المسألة (عدد الاستراتيجيات التي تتضمنها المباراة) فيقع الاختيار على الطريقة التي تتضمن عدد قيود أقل.

مثال (7):

Consider the following 3 × 3 game: Find the optimal solution using linear programming method:

		B		
		1	2	3
A	1	3	-1	-3
	2	-3	3	-1
	3	-4	-3	3

Solution:

أولاً: نحسب Row minimum و column maximum لمصفوفة الدفع.

		B			
		1	2	3	Row minimum
A	1	3	-1	-3	-3
	2	-3	3	-1	-3
	3	-4	-3	3	-4
Column maximum		3	3	3	

بما أن Maximin value = -3 للاعب A وبما أن قيمة اللعبة سالبة لذا نضيف مقدار ثابتة (K) على جميع قيم مصفوفة الدفع على شرط أن قيمة K تكون

مساوية إلى قيمة اللعبة أو أكبر منها أي (+3) . $K \geq 3$ لو فرضنا أن $K = 5$ فإن المصفوفة تصبح كما يلي:

		B		
		1	2	3
A	1	8	4	2
	2	2	8	4
	3	1	2	8

فنختار اللاعب B أولاً فإن صياغة النموذج الرياضي إلى اللاعب B هو:

$$\text{Max} \quad w = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

Subject to:

$$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1$$

$$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1$$

$$Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1$$

$$Y_1 , Y_2 , Y_3 \geq 0$$

تحول القيود إلى مساواة بإضافة slack variable إلى الطرف الأيسر للمتباينات كما يلي:

$$\text{Max} \quad w = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 + S_1 = 1$$

$$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 + S_2 = 1$$

$$Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 + S_3 = 1$$

$$Y_1 , Y_2 , Y_3\ S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$$

والآن نحل باستخدام أسلوب البرمجة الخطية وكما يلي:

Basic	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	8	4	2	1	0	0	1
S_2	2	8	4	0	1	0	1
S_3	1	2	8	0	0	1	1
W	-1	-1	-1	0	0	0	0
$-2\times y_1$	1	1/2	1/4	1/8	0	0	1/8
S_2	0	7	7/2	-1/4	1	0	3/4
S_3	0	3/2	31/4	-1/8	0	1	7/8
W	0	-1/2	-3/4	+1/8	0	0	1/8
Y_1	1	29/62	0	32/248	0	-1/3	24/248
S_2	0	196/31	0	-24/124	1	14/3	44/124
Y_3	0	6/31	1	-1/62	0	4/3	7/62
W	0	-22/62	0	28/248	0	1	52/248
Y_1	1	0	0	1/7	-1/14	0	1/14
Y_2	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196
Y_3	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49
	0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196

الحل الأمثل Optimal solution:

$$V^* = \frac{1}{w} - K = \frac{196}{45} - 5 = -\frac{29}{45}$$

$$Y_1^* = \frac{Y_1}{w} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{45}{196}} = \frac{14}{45}$$

$$Y_2^* = \frac{Y_2}{w} = \frac{\frac{11}{196}}{\frac{45}{196}} = \frac{11}{45}$$

$$Y_3^* = \frac{Y_3}{w} = \frac{\frac{5}{44}}{\frac{45}{196}} = \frac{20}{45}$$

يمكننا أيضاً الحصول على نتائج الاستراتيجيات التابعة للاعب A من الحل الأمثل للاعب B كـما يلي:

$$X_1 = \frac{5}{49} \quad , \quad X_2 = \frac{11}{196} \quad , \quad X_3 = \frac{1}{14}$$

$$Z = w = \frac{45}{196}$$

علماً بأن:

$$X_1^* = \frac{X_1}{Z} = \frac{20}{45} \quad , \quad X_2^* = \frac{X_2}{Z} = \frac{+11}{45}$$

$$X_3^* = \frac{X_3}{Z} = \frac{14}{45}$$

مثال (8):

Solve the following game:

	B			
A	-3	-1	1	0
	-1	-2	-2	-1
	0	1	-1	-3

Solution:

	B				Row minimum
A	-3	-1	1	0	-3
	-1	-2	-2	-1	-2 Maximin
	0	1	-1	-3	-3
Column Max	0	1	1	0	

V = -2

نضيف K = 3

		B			
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
A	X_1	0	2	4	3
	X_2	2	1	1	2
	X_3	3	4	2	0

نكون النموذج الرياضي:

Max $\quad w = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$

Subject to:

$$2Y_2 + 4Y_3 + 3Y_4 \leq 1$$

$$2Y_1 + Y_2 + Y_3 + 2Y_4 \leq 1$$

$$3Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1$$

$$Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 \geq 0$$

Basic	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	0	2	4	3	1	0	0	1
S_2	2	1	1	2	0	1	0	1
S_3	3	4	2	0	0	0	1	1
W	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
S_1	0	2	4	3	1	0	0	1
S_2	0	-5/3	-1/3	2	0	1	-2/3	1/3
Y_1	1	4/3	2/3	0	0	0	1/3	1/3
W	0	1/3	-1/3	-1	0	0	1/3	1/3
S_1	0	9/2	9/2	0	1	-3/2	1	½
Y_4	0	-5/6	-1/6	1	0	1/2	-1/3	1/6
Y_1	1	4/3	2/3	0	0	0	1/3	1/3
W	0	-1/2	-1/2	0	0	1/2	0	1/2
Y_2	0	1	1	0	2/9	-1/3	2/9	1/9
Y_4	0	0	2/3	1	5/27	4/18	-4/27	7/27
Y_1	1	0	-2/3	0	-8/27	4/9	1/27	5/27
W	0	0	0	0	1/9	1/3	1/9	5/9

Optimal solution

$$V^* = \frac{9}{5} - 3 = \frac{-6}{5}$$

$$Y_1^* = \frac{5}{27} \times \frac{9}{5} = \frac{1}{3}$$

$$Y_2^* = \frac{1}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$$

$$Y_4^* = \frac{7}{27} \times \frac{9}{5} = \frac{7}{15}$$

أما الحل الأمثل إلى اللاعب A فهو:

$$X_1^* = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$X_2^* = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$X_3^* = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

أسئلة الفصل السادس

1- Solve the two – person Zero – sum game with payoff matrix:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2- Two players P_1 , P_2 are each provided with an ace of dimmonds and an oce of clubs. P_1 is also given the two diamonds and P_2 the two clubs, P_1 shows one of his cards and P_2, ignorant of P_1 s\ Choice, shows one of his cards. P_1 wins if the suits match and P_2 wins if they do not. The amount of the payoff is the numerical value of card shown by the winner. If two deuces are shown, the payoff is Zero write down the payoff matrix of this problem and simplify it by eliminating any dominated strategies. Hence, solve the game.

- (i) Solve the two – person Zero – sun with payoff matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii) The general has 3 divisions, the enemy 4. There are two roads leading to the town and the general will capture the town if his troops outnumber the enemy's a long either road. What should hedo? What should the general do if he receives reinforcements of I division (1) before (2) after the troops have been dispatched. Assume that the enemy's military intelligence is good, so that they have knowledge of the extra division.

4- Find the solution of the games with the following payoff matrix:

$$(1)\begin{pmatrix} 13 & 8 & -2 & 9 \\ 10 & 9 & 12 & 11 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \\ 12 & 6 & 11 & 6 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} -2 & 16 & 15 & 8 \\ -3 & 14 & 13 & 7 \\ 10 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

5- Find the saddle point and the value of the game for each of the following two games. The payoff is for player A.

1)

	B			
A	8	6	2	8
	8	9	4	5
	7	5	3	5

2)

	B			
A	4	-4	-5	6
	-3	-4	-9	-2
	6	7	-8	-9
	7	3	-9	5

6- Indicate whether the values of the games are greater than, less than or equal to Zero:

1)

	B			
A	1	9	6	0
	2	3	8	4
	-5	-2	10	-3
	7	4	-2	-5

2)

	B			
A	3	7	-1	3
	4	8	0	-6
	0	-9	-2	4

3)

	B			
A	-1	9	6	8
	-2	10	4	6
	5	3	0	7
	7	-2	8	4

4)

	B		
A	3	6	1
	5	2	3
	4	2	-5

7) Find the value of the game and the optimal strategies for player A and B graphically:

	B	
A	4	2
	3	2
	2	3
	6	-1

8- Consider the game:

B

A	5	50	50
	1	1	0.1
	10	1	10

Verify that the startegies ($\frac{1}{6}$, 0 , $\frac{5}{6}$) for player A and ($\frac{49}{54}$, $\frac{5}{54}$, 0) for player B are optimal and find the value of the game.

9- Solve graphically:

1) B

A	1	3	-3	7
	2	5	4	-6

2) B

A	1	2
	5	6
	-7	9
	-4	-3
	2	1

3) B

A	1	2	5
	8	4	7
	-1	5	-6

10- Solve the following games by linear prigramming:

1) B

A	-1	1	1
	2	-2	2
	3	3	-3

2) B

A	1	2	-5	3
	-1	4	7	2
	5	-1	1	9

الفصل السابع

البرمجة بالأعداد الصحيحة

Integer Programming

الفصل السابع

البرمجة بالأعداد الصحيحة

Integer Programming

7-1 Introduction:

Integer programming method can be categorized as:

1- Cutting methods.

2-Search methods.

Cutting methods: which are developed primarily for integer linear problems which starts with end of optimality by adding “secondary” constraints which provide us with condition of the integrality which it means by modifying the solution space until we will have the integrality. Cutting methods means by cutting certain part of the solution which doesn’t have any integers number.

Search methods: by developing “clever” test that consider only portion of the feasible integer most important method is the branch-and-bound method it also start with the end of optimal solution.

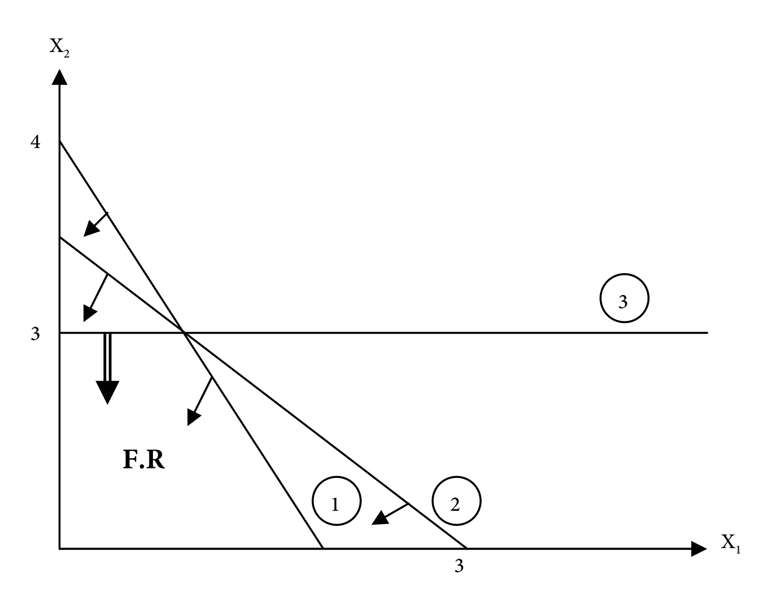
البرمجة بأعداد صحيحة Integer Programming هي أحد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية وكما ذكرنا سابقاً أن منطقة الحل Feasible Region عبارة عن منطقة حلول لمشاكل البرمجة الخطية Linear Programming.

إن كل نقطة تقع ضمن منطقة مجال الحل تحقق قيود مشكلة البرمجة الخطية، فإن كل نقطة تعتبر حلاً أساسياً لكن لا تعتبر حلاً أمثلاً، إن الحل الأمثل يقع عند نقطة تقاطع القيود المحيطة بالمشكلة، فإن نقاط تقاطع القيود المحيطة بمشكلة البرمجة الخطية قد لا تكون حلول عددية صحيحة بل تكون كسور حقيقية Real number وبما أن البرمجة العددية ينصب اهتمامه بالأعداد الصحيحة الخالية من الكسور.

إن أغلب النظريات التي وضعت لمعالجة هذا النوع من المشاكل كانت غير كفؤة من الناحية الحسابية من جهة ومن ناحية الوقت اللازم لمعالجة المشكلة من

جهة أخرى، تبرز هذه المشكلة بشكل واضح كلما كبر حجم المشكلة وهذا خلاف ما هو عليه في مشكلة البرمجة الخطية ذات التغيرات الكثيرة التي يمكن معالجتها بوقت محدد ومعقول، هنالك العديد من المشاكل التي تقع ضمن نطاق برمجة الأعداد الصحيحة مثل مشاكل تتعلق بعدد المكائن أو عدد العمال أو عدد البواخر أو السيارات أو عدد المواش أو أي عدد من الأشياء التي لا يمكن تجزئتها وحتى وإن كانت سلع كذلك لا يمكن تجزئتها يجب أن يكون الجواب دائماً عدد صحيح، فمثلاً لا يمكن أن نصنع 15 سيارة ونصف أو ننتج بضاعة معينة عدد وحداتها $\frac{100}{3}$ لا يجوز هذا يجب أن يكون الجواب عدد صحيح، فالمسائل التي تشترط أن تكون جميع متغيراتها (Xj) ذات قيم عددية صحيحة Integers وتدعى بمسائل البرمجة العددية الصحيحة التامة " Pure Integer Programming Problem" أما إذا اشترط أن يكون بعض متغيرات المسألة ذات قيم عددية صحيحة فتدعى بمسائل البرمجة بالأعداد الصحيحة المختلطة Mixed Integer Programming Problem.

لهذا يمكن القول أن الحلول الأساسية لمشكلات برمجة الأعداد الصحيحة يجب أن تكون Integers وإذا لم تكن أعداد صحيحة فإنها لا تعتبر حلولاً أساسية لها، تظهر في بعض مشكلات البرمجة الخطية البسيطة Simple Linear programming حلولاً عددية صحيحة وهذه الحلول تصلح للبرمجة العددية ولكن حدوث تلك المشكلات نادرة وتحدث أحياناً، فلو فرضنا أن $X_2 \geq 0, X_1 \geq 0$ متغيرين لمشكلة ما من مشاكل البرمجة الخطية وأن شكل رقم (1) يمثل الرسم البياني لإحدى المشكلات والذي يبين فيها إمكانية الحل Feasible Region



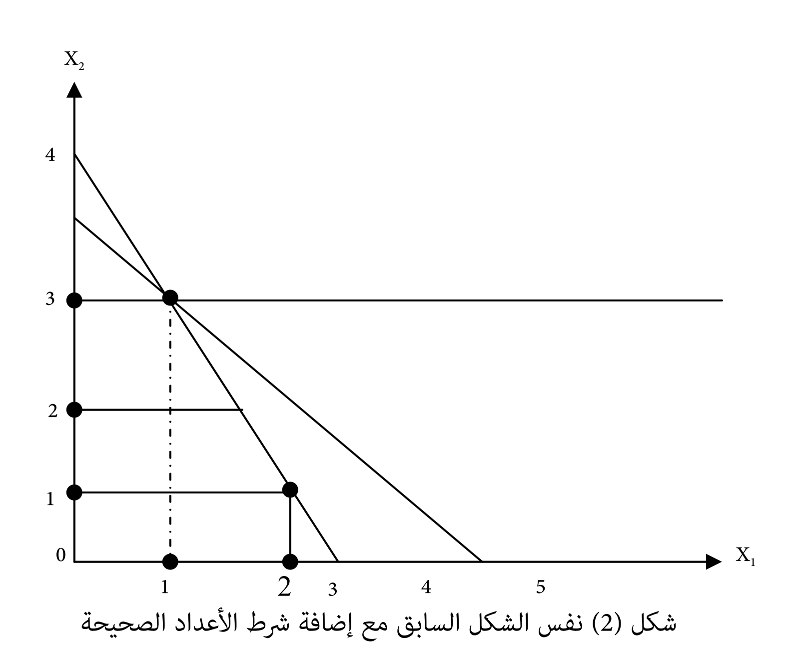
شكل رقم (1) يمثل مجال الحل

أن أية نقطة تقع ضمن نقاط F.R للمشكلة سواء كانت النقطة واقعة عند رؤوس المنطقة المكونة للمجال فيكون هناك حل لكن أحدهم يمثل الحل الأمثل عند أحد رؤوس التقاطع ولكن إذا أضفنا الشرط التالي:

$X_1 \geq 0$ and X_1 is Integer

$X_2 \geq 0$ and X_2 is Integer

ففي هذه الحالة الوضع مختلف، لكن ليست كل نقطة ضمن FR في شكل (1) تمثل حلاً ممكناً بعد إضافة الشرط الأخير، ففي الحالة الأولى هناك مالانهاية من الحلول، أما في الحالة الثانية فهناك أعداد معينة فقط هي التي تكون حلاً ممكناً، ففي هذه الحالة ستكون الحلول الممكنة عبارة عن نقاط تقاطع المستقيمات الواصلة بين تقسيمات المحور السيني والمحور الصادي وكما في الشكل (2).



شكل (2) نفس الشكل السابق مع إضافة شرط الأعداد الصحيحة

فهنا عدد الحلول عبارة عن نقاط التقاطع المبينة في الشكل (2) أن عدد الحلول سيكون عشرة حلول ممكنة وهي:

$(X_1 = 0 , X_2 = 0)$, $(X_1 = 0, X_2 = 1)$

$(X_1 = 0 , X_2 = 2)$, $(X_1 = 0, X_2 = 3)$

$(X_1 = 1 , X_2 = 1)$, $(X_1 = 1, X_2 = 2)$

$(X_1 = 2 , X_2 = 1)$, $(X_1 = 1, X_2 = 3)$

$(X_1 = 2 , X_2 = 0)$, $(X_1 = 1 , X_2 = 0)$

ويمكن القول أن مشكلة البرمجة الخطية عبارة عن دوال مستمرة Continuous Function أما مشكلات برمجة الأعداد الصحيحة دوال متقطعة Discrete Function وعندما تكون قيم المتغيرات مقيدة بشرط أن المتغيرات يجب أن تكون Integers فإن تلك المشكلات تسمى Pure Integer Programming Problem أما إذا كانت بعض المتغيرات مقيدة بشرط كونها أعداد صحيحة وبقية المتغيرات غير مقيدة فإن هذا النوع يسمى بالبرمجة العددية المختلطة Mixed Integer Programming وفي بعض الأحيان تكون المشكلات مقيدة بشروط معينة كأن تقول أن قيمة X_1 أو X_2 محددة بقيمة معينة فمثلاً أن $X_1 = 0$ أو $X_1 = 1$ أو

$X_2 = 0$ أو $X_2 = 1$ ففي مثل هذه المشكلات تسمى البرمجة ذات الصفر - واحد (ثنائية) - Zero one Programming.

7-2 أساليب حل البرمجة العددية:

Integer Programming and Optimality technique

تعتبر طريقة البرمجة المبسطة Simplex الأساس في معالجة أية مشكلة من مشاكل البرمجة العددية الصحيحة فإذا وجد الحل وكان عدداً صحيحاً فإن المشكلة قد وجد لها حل ولا تحتاج إلى اتباع أساليب أخرى أما إذا كان لم يكن الجواب ذات نتائج صحيحة فيجب اتباع الأساليب التالية:

7-2-1 طريقة قطع المستوى Cutting Plane Methods

7-2-2 طريقة البحث Search Method

7-2-1 طريقة قطع المستوى Cutting Plane Methods:

هذه الطريقة تعتبر أحد الطرق المهمة والفعالة في إيجاد حلول معظم مشكلات برمجة الأعداد الصحيحة وأن هذه الطريقة توصل إليها ري كومري R. E. Gomery والتي تعتمد أساساً على طريقة Simplex والتي نحصل من خلالها على حل أمثل ذو قيم حقيقية Continuous Optimum Solution ولغرض الحصول على حل أمثل عددي صحيح Integer وذلك بإضافة قيد ثانوي جديد ذو طبيعة خاصة إلى جدول الحل الأمثل بأسلوب Simplex.

إن القيد الجديد يسمى Cutting قيد قطع من خلاله يقتطع جزء من حيز الحل Solution space الذي يحتوي على قيم حقيقية فقط يعني قطع الجزء الذي لا يحوي على قيم صحيحة، إن إضافة قيد القطع Cutting Constraint إلى الجدول النهائي يجعل المسألة خاضعة لعدد مختلف من القيود عما كانت عليه المسألة الأساسية Basic Problem وللحصول على الحل الأمثل بالقيود الجديدة نطبق أسلوب Simplex مرة أخرى، إلى أن نصل إلى الحل المطلوب وأن قيم X_j أعداد صحيحة فنتوقف عندها أما إذا لم نحصل على قيم صحيحة نكرر عملية إضافة قيد قطع

ثانوي آخر ويعاد حل المسألة مرة ثانية حتى يتم الحصول على حل عددي صحيح أمثل.

والمثال التالي يوضح خطوات العمل والمسماة بطريقة كومري R. E. Gomary

مثال (1):

Consider the integer linear programming problem

Max $Z = 7X_1 + 9X_2$

Subject to:

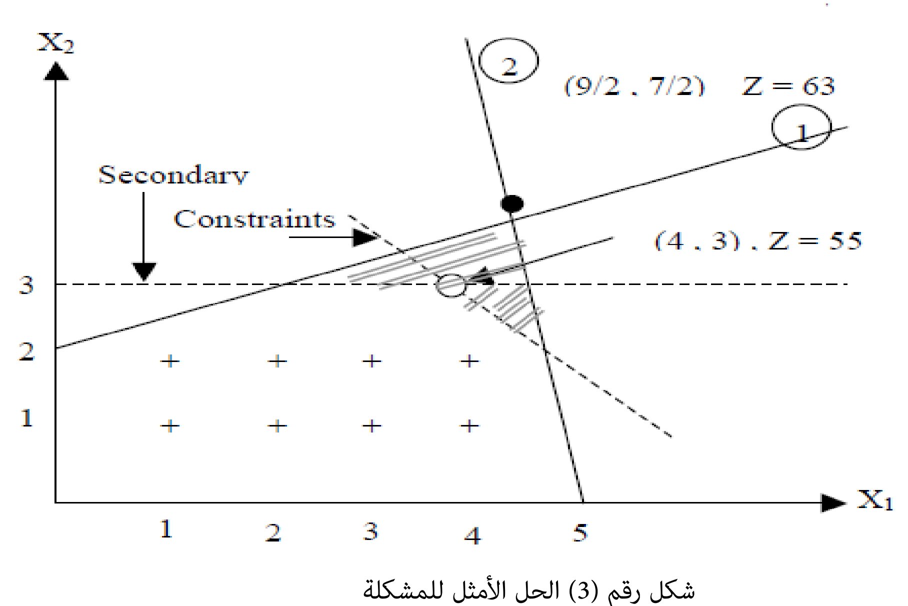
$-X_1 + 3X_2 \leq 6$

$7X_1 + X_2 \leq 35$

X_1, X_2 non negative integer

Solution:

أولاً: نرسم القيود:



شكل رقم (3) الحل الأمثل للمشكلة

فإن الحل الأمثل يتحقق عندما $X_1 = \frac{9}{2}$, $X_2 = \frac{7}{2}$ لتحقق أعظم قيمة قدرها 63.

كما بينا سابقاً أن طريقـة القطـع Cutting تعتمـد عـلى قطـع أجـزاء معينـة مـن حيـز الحـل Feasible Solution أو ما يسمى بـ Feasible Region بحيث لا يحتوي ذلك الجزء المقطوع على قيم عددية صحيحة، إن الغرض من هذا القطع الوصول إلى حل جديد خالي من القيم الكسرية تكون نقاط زواياه ذات قيم عددية صحيحة، فهنا نحتاج إلى إضافة قيدين ثانونين لقطع جزء من الحل فعند ذلك نكون قد حصلنا على قيم عددية صحيحة للمتغيرات X_2, X_1 مثلاً $X_1 = 4$, $X_2 = 3$ أما دالـة الهـدف = 55.

ويمكن توضيح نتائج الحل في الحالتين Simplex و Cutting كما في الجدول التالي:

نتائج قيم المتغيرات بطريقة البرمجة العددية (القطع)	نتائج قيم المتغيرات بطريقة Simplex
$X_1 = 4$	$X_1 = 9/2$
$X_2 = 3$	$X_2 = 7/2$
$Z = 55$	$Z = 63$

ويمكن ملاحظة ذلك في الرسم أن الجزء المظلل Shaded area لا يحتوي أي عدد صحيح وهـو الجزء المقطوع.

فيما يلي تحليل كامل يبين كيفية إضافة Secondary Constraints وكيفية عملها في الحالتين :

7-2-1-1 خوارزمية الكسور The Fractional (Pure Integer) Algorithm:

هنـاك شرط أسـاسي عنـد تطبيـق طريقـة القطـع Cutting Plane هـو أن تكـون معـاملات المتغيرات Coefficient variable لجميع القيود التي تتضمنها المسألة ذات قيم عددية صـحيحة، كـما في القيد التالي:

$$X_1 + \frac{1}{3} X_2 \leq \frac{13}{2}$$

وبعد تبسيط هذا القيد بالتخلص من المقامات وذلك بضرب طرفي القيد بالمضاعف المشترك الأصغر للمقام والبالغ 6 وحدات فنحصل على قيد جديد

$$6X_1 + 2X_2 \leq 39$$

هنا في هذا القيد أبعدنا كل الكسور (التخلص من المعاملات الحقيقية) أي كل الاحتمالات الممكنة التي تؤدي إلى عدم الحصول على حل عددي مناسب.

أما خطوات طريقة القطع فهي:

1- حل المسألة باستخدام أسلوب Simplex البرمجة البسيطة.

2- إذا كانت نتائج الخطوة (1) قيم عددية صحيحة Integers توقف عن الحل أما إذا كانت نتائج الحل غير صحيحة اذهب إلى خطوة 3.

3- يتم إضافة قيد ثانوي Secondary Constraint يحدد الحل نحو القيم العددية الصحيحة وكما موضحة أدناه، فإذا كان لدينا (الحل الأمثل النهائي للمسألة) البرمجة الخطية الاعتيادية معطاة كما أدناه.

Basic	X_1	…	X_i	…	X_m	W_1	…	W_j	…	W_n	R.H.S
X_1	1	…	0	…	0	α_1^1	…	α_1^j	…	α_1^n	B_1
.	.		.		.	.		.		.	.
.	.		.		.	.		.		.	.
.	.		.		.	.		.		.	.
X_i	0	…	1	…	0	α_i^1	…	α_i^j	…	α_i^n	B_i
.	.		.		.	.		.		.	.
.	.		.		.	.		.		.	.
.	.		.		.	.		.		.	.
X_m	0	…	0	…	1	α_m^1	…	α_m^j	…	α_{ni}^n	B_m
Z	0	…	0	…	0	$\bar{C}_i$	…	$\bar{C}_j$	…	$\bar{C}_n$	B_0

جدول (1) Optimal Solution

فإن المتغيرات X_i (i= 1, 2, …, m) متغيرات أساسية Basic Variables أما w_j (J = 1, 2, …, n) عبارة عن متغيرات غير أساسية في المسألة non basic variables وتم تدوينها كما هو ظاهر في الجدول رقم (1).

افرض أن ith من المعادلات المتمثلة بالمتغيرات الأساسية X_i والمقترحة أنها غير صحيحة كـما في المعادلة:

$$X_i = B_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j \quad W_j \qquad\qquad B_i \quad \text{noninteger (source row)}$$

B_i متغير ذو قيمة عددية غير صحيحة ولنفترض أن كل من B_i و α_i^j تساوي ما يلي:

$$B_i \;=\; \left[B_i\right] + f_i$$

$$\alpha_i^j = \left[\alpha_i^j\right] + f_{ij}$$

علماً بأن قيم كل من fi, fi_j تتراوح بين صفر والواحد

$$0 \;<\; fi \;<\; 1$$

$$0 \;\leq\; fi_j \;<\; 1$$

لو فرضنا أن $N = [a]$ أكبر عدد صحيح وأن $N \leq a$ ويتبـع ذلـك $0 < fi_j < 1$ و $0 \leq fi_j < 1$ هذا يعني أن fi كسر موجب و fi_j أيضاً كسر يكون non negative أي بمعنى آخر نفرض أن (a) تمثـل عدد حقيقي فبإمكاننا تمثيله بجزئية الصحيح منه ونرمز له بالرمز (a) والجزء الحقيقي نرمز له بـالرمز (f) هذا فإن f تساوي ما يلي:

$$f = a - [a]$$

ولنفرض المثال التالي وكما هو موضح في الجدول أدناه:

a	[a]	f = a – (a)
1 1/2	1	1/2
-2 1/3	-3	2/3
-1	-1	0
-2/5	-1	3/5

جدول رقم (2)

فإن source row يمكن تمثيلها بالصيغة الجديدة وهي:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} W_j = X_i - \left[B_i\right] + \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_i^j\right] w_j$$

بما أن قيم كل من wj, fij ينبغي أن يكون أكبر من أو تساوي الصفر لكل قيم i, j وهذه كانت حصيلة أن wj, Xi يمكن أن تكون صحيحة فإن الطرف الأيمن للمعادلة أعلاه يجب أن تكون integer والمقابل تعامل الطرف الأيسر والذي يجب أن تكون integer.

ومن ذلك نستنتج بأن قيمة الحد $\sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j \geq 0$ هو مقدار موجب، ومن ذلك نستنتج أيضاً أن الطرف الأيسر للمعادلة أعلاه ينبغي أن تكون أصغر من الواحد:

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j \leq f_i \leq 1$$

ويمكن كتابة القيد أعلاه كما يلي:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j - f_i \quad \text{(fractional cut)}$$

وهذا القيد يمثل القيد القطع الجزئي fractional cut constraint حيث أن Si متغير مرن موجب ذو قيمة عددية صحيحة non negative slack variable إلا أنه من ملاحظة Constraint أعلاه يبدو وأن Si سالبة (si = -fi) ومن الجدول الأخير فإن wj = 0 لذا تكون Si سالبة وهذا يعني أي أن عملية إضافة قيد القطع الثانوي Secondary cut sonstraint أدى إلى عدم infeasible إمكانية الحصول على حل مناسب infeasible solution.

فيتم التخلص من هذه المشكلة باستخدام طريقة dual-simplex لغرض الوصول إلى حل أمثل مناسب، فإذا حصلنا على حل عددي مناسب نتوقف عن الحل والعكس صحيح نكرر الخطوات السابقة من تكوين قيد قطع آخر لقطع جزء آخر من حيز الحل FR.

بحيث لا يحتوي على أي قيمة عددية صحيحة، وهكذا تسمى بعمليات القطع المتكررة لحين بلوغ الحل الملائم (عددي وصحيح).

والجدول التالي يبين عملية إضافة القيد Fractional cut ويصبح الجدول كما يلي:

Basic	X_1	…	X_i	…	X_m	W_1	…	W_j	…	W_n	S_i	R.H.S
X_1	1	…	0	…	0	α_1^1	…	α_1^j	…	α_1^n	0	B_1
.	.		.		.	.		.		.	.	.
.	.		.		.	.		.		.	.	.
.	.		.		.	.		.		.	.	.
X_i	0	…	1	…	0	α_i^1	…	α_i^j	…	α_i^n	0	B_i
.	.		.		.	.		.		.	.	.
.	.		.		.	.		.		.	.	.
.	.		.		.	.		.		.	.	.
X_m	0	…	0	…	1	α_m^1	…	α_m^j	…	α_{ni}^n	0	B_m
S_i	0	…	0	…	0	$-f_{i1}$	…	$-f_{ij}$	…	$-f_{in}$	1	$-f_i$
Z	0	…	0	…	0	$\bar{C}_i$	…	$\bar{C}_j$	…	$\bar{C}_n$	0	B_0

فـإذا كـان الحـل الجديـد new solution بعـد اسـتخدام dual simplex method البرمجـة الثنائية هي برمجة عددية صحيحة نتوقف عن الحل أما إذا لا فتسمى بإضافة قيد قطع جديـد new fractional cut من الحل الناتج بتحويل infeasible solution إلى feasible بأعداد صـحيحة أمـا إذا كانت تشير إلى عدم إمكانية الحصول على حل أمثل فنستنتج بأنه لا يمكن الحصـول عـلى حـل عـددي أمثل للمسألة الأساسية The problem has no feasible integer solution.

مثال (2):

Find the optimal integer solution for the following linear programming.

Max $Z = 3X1 + X2 + 3X3$

subject to:

$$-X1 + 2X2 + X3 \leq 4$$

$$4X2 - 3X3 \leq 2$$

$$X1 - 3X2 + 2X3 \leq 3$$

X1. X2. X3 are integers

Solution:

1- نجد الحل الأمثل باستخدام أسلوب simplex:

Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	-1	2	1	1	0	0	4
S_1	0	4	-3	0	1	0	2
S_3	1	-3	2	0	0	1	3
Z	-3	-1	-3	0	0	0	0
S_1	0	-1	3	1	0	1	7
S_2	0	4	-3	0	1	0	2
X_1	1	-3	2	0	0	1	3
Z	0	-10	3	0	0	3	9
S_1	0	0	9/4	1	1/4	1	15/2
X_2	0	1	-3/4	0	1/4	0	1/2
X_1	1	0	-1/4	0	3/4	1	9/2
Z	0	0	-9/2	0	10/4	3	14
X_3	0	0	1	4/9	1/9	4/9	10/3
X_2	0	1	0	1/3	1/3	1/3	3
X_1	1	0	0	1/9	7/9	10/9	16/3
Z	0	0	0	2	3	5	29

Optimal solution

$X_1 = \frac{10}{3}$ not iteger

$X_2 = 3$ integer

$X_3 = \frac{10}{3}$ not integer

Z = 29

2- هذا يعني أن كل النتائج التي حصلنا عليها ليست جميعها أعداد صحيحة لذا يجب أن ننتقل إلى الخطوة 3.

3- نكون قيد قطع ثانوي Secondary cutting constraint يعاد إلى الجدول الأخير للحل الأمثل، وتعتمد عملية تكوين قيد قطع على المتغير الأساسي ذو القيمة الحقيقية الذي يمتلك أكبر جزء حقيقي من بين المتغيرات الحقيقية الأخرى Max(fi)، نلاحظ أن المتغيران الأساسيان هما X3, X1 يملكان نفس القيمة للجزء الحقيقي

أي أن f1 = f3 = 1/3 لـذا يمكننـا اختيـار أحـدهما عشـوائياً لـتكن X3 فالمعادلـة التـي تقابـل المتغـير الأساسي X3 في الجدول الأخير لنتائج الحل في الخطوة رقم (1) هي:

$$X_3 + \frac{4}{9}S_1 + \frac{1}{9}S_2 + \frac{4}{9}S_3 = \frac{10}{3}$$

يمكننا كتابة المعادلة بشكل آخر حسب القواعد السابقة كما يلي:

$$X_3 + (0 + \frac{4}{9})S_1 + (0 + \frac{1}{9}S_2) + (0 + \frac{4}{9}S_3) = 3 + \frac{1}{3}$$

فإن

$$S_4 - \frac{4}{9}S_1 - \frac{1}{9}S_2 - \frac{4}{9}S_3 = -\frac{1}{3}$$ Corresponding Fractional cut

The new tableau:

Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
X_3	0	0	1	4/9	1/9	4/9	0	10/3
X_2	0	1	0	1/3	1/3	1/3	0	3
X_1	1	0	0	1/9	7/9	10/9	0	16/3
S_4	0	0	0	-4/9	-1/9	-4/6	1	-1/3
Z	0	0	0	2	3	5	0	0

وباستخدام طريقة Dual Simplex لوجـود القيمـة سـالبة في R.H.S، وذلـك فـإن S4 المتغـير الخارج أما المتغير الداخل فيكون هو S1 وذلك بتقسيم دالة الهدف O.F على المعاملات السالبة فقـط للمعادلة S4 والجدول الجديد بعد تطبيق العمل الحسابي هو:

Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	R.H.S
X_3	0	0	1	0	0	0	1	3
X_2	0	1	0	0	+4/1	0	3/4	11/4
X_1	1	0	0	0	3/4	-1	1/4	21/4
S_1	0	0	0	1	1/4	1	-9/4	3/4
Z	0	0	0	0	5/2	3	9/2	55/2

من الجدول أعلاه نلاحظ أن النتائج لا زالت قيم حقيقية Fractional غير صحيحة فلا يزال الحل غير أمثل لذا نحتاج إلى تكوين قيد قطع جديد معتمدين على المتغير الأساسي الذي يمتلك أكبر Fraction نلاحظ أن X2 ذو قيمة تعادل $2+\frac{3}{4}$ أما المعادلة المقابلة له بعد تطبيق القاعدة:

$$X_2 + (0+\frac{1}{4})S_2 + (0+\frac{3}{4})S_4 = 2+\frac{3}{4}$$

فإن:

$$S_5 - \frac{1}{4}S_2 - \frac{3}{4}S_4 = -\frac{3}{4}$$

وهذا يمثل قيد القطع الجديد إلى الجدول السابق ويحل باستخدام أسلوب Dual Simplex والجدول الثاني يمثل الحل الأمثل بعد استخراج المتغير الخارج Leaving Variable (S_5) أما المتغير الداخل فيمثل S4 لأنه يملك أصغر نسبة مطلقة بعد قسمة دالة الهدف على معاملات المتغير الخارج (صف).

Basic	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	R.H.S
X_3	0	0	1	0	-1/3	0	0	4/3	2
X_2	0	1	0	0	0	0	0	1	2
X_1	1	0	0	0	2/3	-1	0	1/3	5
S_1	0	0	0	1	1	1	0	-3	3
S_4	0	0	0	0	1	0	1	-4/3	1
Z	0	0	0	0	1	3	0	6	23

Optimal solution

إن جميع المتغيرات في الجدول الأخير ذات قيم عددية صحيحة Integers هذا يعني تم التوصل إلى الحل الأمثل بعد إجراء عمليتي قطع لحيز الحل الأساسي للمسألة لذا نتوقف عن الحل وهذه تمثل المرحلة النهائية المثلى حيث:

$X_1 = 5$, $X_2 = 2$, $X_3 = 2$

لتحقيق هدف مقداره Z = 23

7-2-1-2 خوارزمية المتغيرات المختلطة The Mixed Algorith:

كما بينا سابقاً في المسائل المختلطة أن المتغيرات Variables تتضمن متغيرات ذات قيم عددية صحيحة وغير صحيحة في آن واحد فلنفترض أن Xk هو أحد المتغيرات الأساسية لمسألة Mixed Problem كما في حالة Pure Integer أن Xk قيمة حقيقية Rail number مثلى (optimum) تم الحصول عليها بعد معالجة المسألة بطريقة Simplex ويمكن التعبير عنها كما يلي:

$$X_k = B_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_k^j w_j = \left[B_k\right] + f_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_k^j w_j \qquad \text{(source row)}$$

وبتحويل Bk للطرف الآخر نحصل على:

$$X_k - \left[B_k\right] = f_k - \sum_{j=1}^{n} \alpha_k^j w_j$$

إن الخواص التي تتصف بها المسائل Mixed Problem لا يمكن معها استخدام طريقة القطع الجزئي التي تم مناقشتها لكن هنا ما نحتاج إليه هو تكوين قيد قطع جديد new cut مبني على نفس الفكرة السابقة معتمداً في نفس الوقت على مواصفات المسائل من نوع Mixed problem بجعل Xk (integer) لا بد من تحقيق أحد الشرطين التاليين:

$$X_k \leq \left[B_k\right] \qquad or \qquad X_k \geq \left[B_k\right] + 1$$

ويمكن التعبير عن هذين الشرطين كما في:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_k^j w_j \geq f_k \qquad \text{(i)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_k^j w_j \leq f_k - 1 \qquad \text{(ii)}$$

بفرض:

j^+ = set of subscripts j for which $\alpha_k^j \geq 0$

j^- = set of subscripts j for which $\alpha_k^j < 0$

ومن (i) و (ii) نحصل على:

$$\sum_{j\in J^+} \alpha_k^j w_j \geq f_k \qquad \text{(iii)}$$

$$\frac{f_k}{f_k - 1}\sum_{j\in J^-} \alpha_k^j w_j \geq f_k \qquad \text{(iv)}$$

وبما أنه لا يمكن لكل من i, ii وكذلك iii و iv حدوثها الواحد تلو الآخر لذا يمكن ربط iii و iv بقيد واحد كما يلي:

$$S_k - \left\{\sum_{j\in J^+} \alpha_k^j w_j + \frac{f_k}{f_k - 1}\sum_{j\in J^-} \alpha_k^j w_j\right\} = -f_k \qquad \text{(mixed cut)}$$

وهذا ما يسمى بالقيد المختلط Mixed Cut وأن Sk ≥ 0 تمثل Slack variables وأن المعادلة الأخيرة تتطلب قيد قطع مختلط Mixed cut والتي تعطى الشرط الضروري لـ Xk أن يكون عدد صحيح integer علما بأن كل $w_j = 0$ في الحل الأمثل الحالي.

هذا يعني أن معادلة قطع المختلط شرطها ضروري لجعل Sk تمتلك قيم عددية صحيحة إلا أن عملية إضافة قيد قطع مختلط إلى الجدول الأخير للحل الأمثل المستمر الذي تم الحصول عليه بأسلوب Simplex سيؤدي إلى عدم إمكانية الحصول على حل مناسب infeasible solution ولمعالجة هذه الظاهرة نلجأ إلى تطبيق أسلوب Dual Simplex لنتخلص من infeasibility الحاصلة بعد إضافة قيد القطع.

مثال (3):

Consider example (1) which was solved graphically at the beginning of the section.

The optimal continuous solution is given bellow suppose that X1 only is restricted to integer values.

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
X_2	0	1	7/22	1/22	7/2
X_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
Z	0	0	28/11	15/11	63

Solution:

From the X_1 – equation:

$$X_1 - \frac{1}{22}S_1 + \frac{3}{22}S_2 = (4 + \frac{1}{2})$$

$J^- = \{3\}$, $J^+ = \{4\}$, $f_1 = \frac{1}{2}$

فإن معادلة القطع تكون:

$$S_3 - \left\{ \frac{3}{22}S_2 + \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} \right) \left(-\frac{1}{22}S_1 \right) \right\} = -\frac{1}{2}$$

بعد التبسيط نتوصل إلى:

$$S_3 - \frac{1}{22}S_2 - \frac{3}{22}S_2 = -\frac{1}{2}$$

وبإضافة هذا القيد على الجدول النهائي للحل الأمثل:

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
X_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
X_1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
S_4	0	0	-1/22	-3/22	1	-1/2
Z	0	0	28/11	15/11	0	63

وبتطبيق أسلوب Dual Simplex المتغير الخارج هو leaving variable S4 أما المتغير الداخل Entering variable يمكن اختياره بعد قسمة معاملات دالة الهدف على معاملات صف S4 وباختيار أصغر قيمة مطلقة تمثل المتغير الداخل ويكون S2 وبعد حلها نحصل على الجدول النهائي التالي:

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
X_2	0	1	10/33	0	-1/3	10/3
X_1	1	0	-1/11	0	1	4
S_2	0	0	1/3	1	-22/3	11/3
Z	0	0	23/11	0	10	58

وهذا الجدول يمثل الحل الأمثل فإن:

$$Z = 58 \qquad X_1 = 4 \qquad X_2 = \frac{10}{3}$$

ونلاحظ هنا أن X1 قيمتها عدد صحيح وكما هو مطلوب.

والآن افرض المطلوب أن X2 أن تكون عدد صحيح.

Suppose that X2 is integer also. Develop its mixed cut from the last tableau of the example Hent:

$$\{Ans . \qquad S_5 - \frac{10}{33} S_1 - \frac{1}{6} S_4 = -\frac{1}{3}\}$$

هذا السؤال متروك إلى الطالب.

ملاحظة: تم اختيار القيد X1 أولاً (المتغير الأساسي ذو القيمة الكسرية الكبيرة Big Fraction) لتكوين قيد القطع الثانوي لأنه يقطع أكبر جزء من حيز الإمكانات المتاحة والذي لا يحوي على عدد صحيح بهدف الوصول إلى الحل الأمثل بأسرع ما يمكن.

7-2-2 طريقة البحث Search Method:

جاء تسمية هذه الطريقة بالبحث لأن فيها يتم البحث عن كل القيم العددية الصحيحة المناسبة وتم استنباط هذه الطريقة من قبل كل من A. G Doig و A. H. Land وأكثر الطرق الشائعة في هذا الأسلوب هو أسلوب Branch and Bound (طريقة التفريغ والتحديد).

وفكرة هذه الطريقة مبنية على أساس تجزئة المشكلة الأصلية إلى مشكلتين فرعيتين مع إضافة قيود جديدة مشتقة من أصل النموذج الرياضي Mathematical Model، وعند ملاحظة عدم ظهور قيم نقطة الحل الأمثل بأعداد صحيحة Integer يتم الاستمرار بالتجزئة والتفريغ حتى يصبح لدينا أربعة نماذج رياضية ويتم التحقق من قيم دالة الهدف وإحداثيات النقاط وهكذا نستمر إلى أن نصل إلى الحل الأمثل الخالي من الكسور، ولهذا الأسلوب مفهوم عام يمكن استخدامه في إيجاد الحل الأمثل لكثير من المشكلات العملية مثلاً مشكلة البائع المتجول Salesman ومشكلة

التوقيت Scheduling وغيرها من المشاكل وقد أحرزت هذه الطريقة نجاحاً واسعاً في تطبيقاتها لإيجاد الحل الأمثل ويمكن تطبيقها في حل مسائل Pure وMixed أيضاً أما الخطوات الرئيسية لطريقة Branch-and-Bound هي:

1- نجد الحل الأمثل للمسألة باستخدام أسلوب Simplex فإذا كان الجواب مستوفي لشروط البرمجة العددية نتوقف عن الحل أما إذا لا نتجه إلى الخطوة (4).

2- نجزأ المسألة الأصلية Main problem إلى قسمين (Sub problem) أو Branch وتكون لدينا مشكلتين جديدتين ونأخذ أحد المتغيرات الأساسية ذو القيمة الغير عددية ونختار العدد الصحيح الأكبر من القيمة غير العددية والعدد الصحيح الذي يكون أصغر من القيمة العددية كما يلي:

نفرض X_r متغير ذو قيمة عددية صحيحة علما بأن قيمته الحقيقية المثلى X_R^* تتم تجزئتها إلى قيمتين بحيث تحقق العلاقة التالية:

$$\left[X_r^*\right] < X_r < \left[X_r^*\right] + 1$$

وهذه لا تحوي حل أمثل Feasible integer ولتحقيق قيمة Feasible integer لـ Xr يجب أن تحقق واحد من الشروط التالية:

$$X_r \leq \left[X_r^*\right] \quad or \quad X_r \geq \left[X_r^*\right] + 1$$

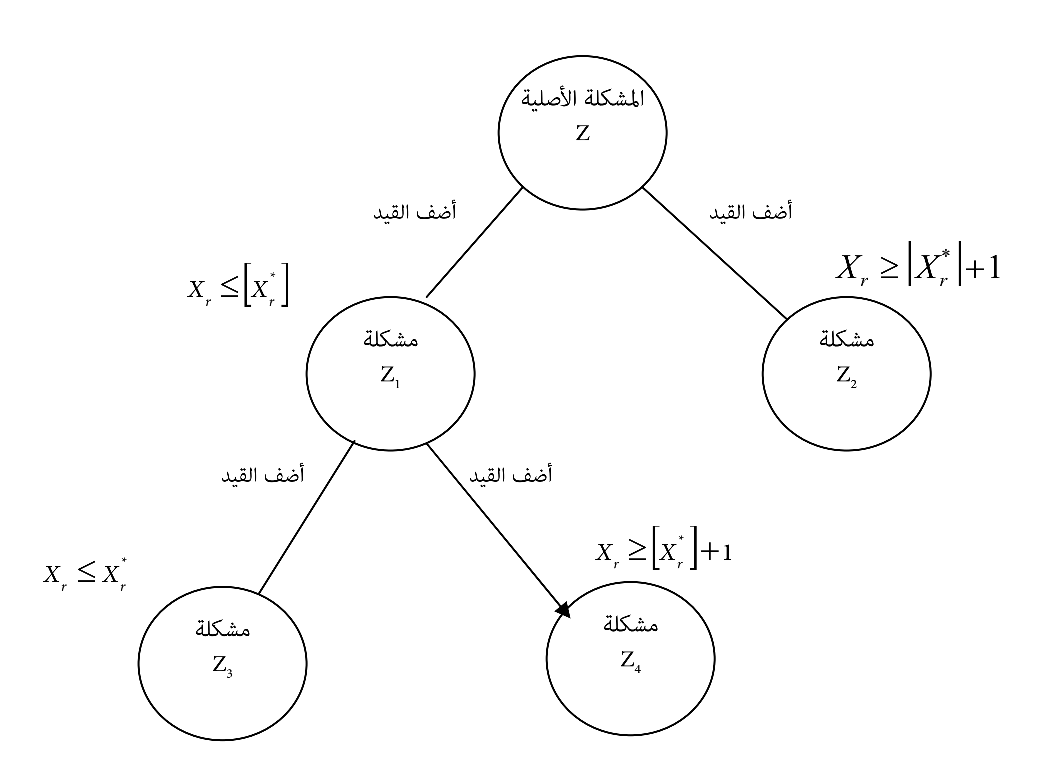
فيتم إضافة القيد الأول إلى جدول الحل الأمثل optimal tableau for the main problem ونجد الحل للمسألة بقيودها الجديدة ففي هذه الحالة يقال للمسألة الأصلية original هي branch أو partitioned إلى جزئين subprobems ومن جهة أخرى يتم إضافة القيد الثاني إلى جدول الحل الأمثل، بما أن إضافة القيد الثاني سيجعل الحل غير مجدي infeasible solution لذا نجد الحل باستخدام أسلوب Dual simplex بقيودها الجديدة، نلاحظ من خلال إضافة القيدين الثانويين أنه قد تم الحصول على مرحلتين للمسألة الأساسية أي تجزئة المسألة إلى فرعين أو مسألتين ثانويتين نتيجة إضافة القيدين الثانونيين أعلاه.

وأن عملية التفريغ هذه تـؤدي إلى حـذف جـزء مـن الحـل الـذي لا يحتـوي عـلى أعداد صحيحة.

3- إذا تم الحصول على نتائج عددية بعـد إجـراء الحلـول اللازمـة للمسـألة الفرعيـة الثانويـة باسـتخدام أسـلوب simplex وبـنفس دالـة الهـدف using the same objective function of original problem، نكون قد حصلنا على الحل الأمثل فنتوقـف عــن "branch" (تجزئـة) وبعكسـه تتم عملية التفريغ (التجزئة) بالاعتماد على نفس الأسلوب السابق.

4- تتم المقارنة بين النتائج العددية المثلى للمسائل الفرعية ثم يقع الاختيار على أفضل النتـائج ولزيادة كفاءة الحل لا بد من إدخال مبـدأ التحديـد bounding فـإذا كانـت دالـة الهـدف مـن نـوع Maximization فإن الحل الأمثل للمسألة يكون دائماً أكبر أو يساوي الحـل الأمثـل للمسـألة الفرعيـة الناتجة من original problem، تعتبر النتائج التي تم الحصول عليها كحد أعلى upper bound.

أما إذا كانت دالة الهدف من نوع Minimization فإن الحـل optimum للمسـألة original يكون دائماً أصغر أو يساوي الحل optimal solution للمسائل الفرعيـة الثانويـة وبهـذا تكـون نتـائج الحلول المثلى للمسألة الأساسية كحد أدنى للنتـائج lower bound وحسـب مـا يوضـحه شـكل (4) إن عملية التجزئة هذه تسمى التفريغ "Branching" أو التحديد "Bound". والشكل أدناه يوضح عملية التجزئة:



شكل (4) يوضح عملية التجزئة

مثال (4):

Max $Z = 2X_1 + 3X_2$

Subject to:

$$5X_1 + 7X_2 \leq 35$$
$$4X_1 + 9X_2 \leq 36$$
$$X_1 , X_2 \geq 0 \quad \text{and integers}$$

Solution:

نحل باستخدام أسلوب simplex فإذا كانت المتغيرات ذات قيم عددية integer value هـذا يعنـي التوصل إلى optimal solution أما إذا لا فنختار أحد المتغيرات الأساسية الحقيقـة basic variable في الحـل النهائي كأساس لعملية التفريـغ branch، الشـكل التخطيطـي أدنـاه يبـين sub problem التـي تفرعـت مـن المسـألة الأساسـية original problem أمـا الأرقـام داخـل الـدوائر تمثـل تسلسـل مـرحلي لعمليـة التفريـغ

والمسألة تبدأ من (1) node والمتمثلة بالحل الأمثل والمستخدمة بأسلوب simplex، والتي كانت نتائجها:

$$X_2 = 2\frac{6}{17} \quad , \quad X_1 = 3\frac{12}{17}$$

وهذه المتغيرات لهما كسور Fraction وواحدة منها تستخدم للبدء بعملية التفريغ فإذا اختيارنا X2 كأساس لعملية التفريغ فيمكننا الحصول على قيمتين (عددين ثانويين) two sub problem are created للمتغير الأساسي X_2 عندما:

$$X_2 \geq 3 \quad , \quad X_2 \leq 2$$

وأن: $$X_2^* = 2\frac{6}{17}$$

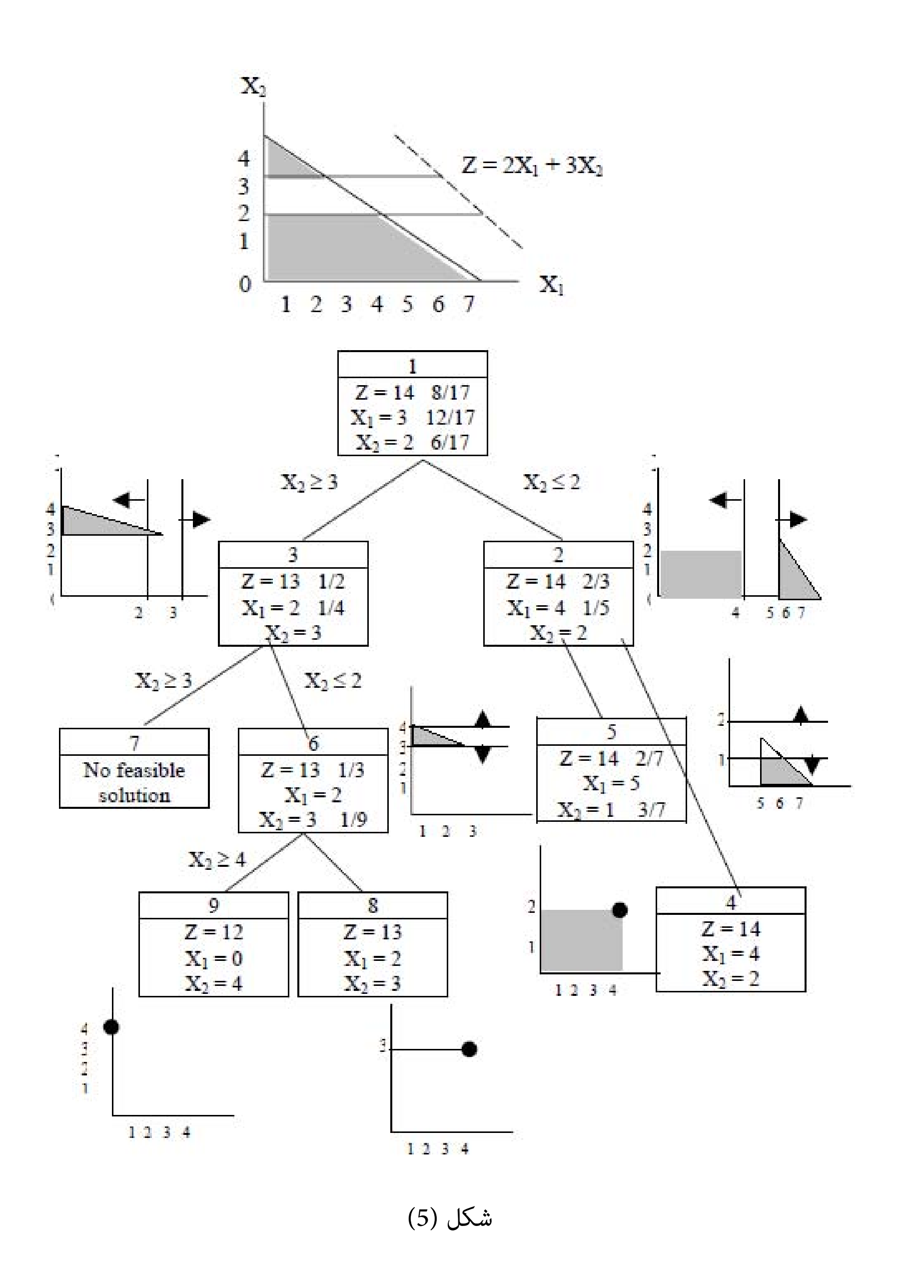
لذا $[X_2^*] = 2$ هذا يعني تفريغ Node 1 (المسألة الأساسية) إلى فرعين أي إضافة القيدين لها والنتائج تكون لدى node 2 و node 3.

انظر إلى الرسم في الشكل (5) فإن two sub problem تحتوي على feasible integer solution للمسألة الأساسية لكن الحل لم يتغير بهذه التجزئة الأولى.

المرحلة الثانية: والمتمثلة بـ node 2 و node 3 والمتفرعة من المرحلة الأولى node 1، فإذا بدأنا sub problem (node 2) وباستخدام أسلوب simplex الاعتيادية إضافة $X_2 \leq 2$ فالنتائج تكون كما يلي:

$$X_1 = 4\frac{1}{5} \quad , \quad X_2 = 2 \quad , \quad Z = 14\frac{2}{5}$$

نلاحظ أنه لا يزال أحد المتغيرين الأساسيين يمتلك قيمة حقيقية $X_1 = 4\frac{1}{5}$ فهذه النتائج غير مثلى لذا يحتاج إلى عملية تفريغ أخرى معتمدين في هذه المرة على X1 في تفريغ المسألة الثانوية إلى فروع ثانوية أخرى والمتمثلة two sub problem وهما node 4 و node 5.



X_2
$Z = 2X_1 + 3X_2$
X_1
1
Z = 14 8/17
X1 = 3 12/17
X2 = 2 6/17
X2 ≥ 3
X2 ≤ 2
3
Z = 13 1/2
X1 = 2 1/4
X2 = 3
2
Z = 14 2/3
X1 = 4 1/5
X2 = 2
X2 ≥ 3
X2 ≤ 2
7
No feasible solution
6
Z = 13 1/3
X1 = 2
X2 = 3 1/9
5
Z = 14 2/7
X1 = 5
X2 = 1 3/7
X2 ≥ 4
9
Z = 12
X1 = 0
X2 = 4
8
Z = 13
X1 = 2
X2 = 3
4
Z = 14
X1 = 4
X2 = 2

شكل (5)

إن النتائج التي تم الحصول عليها من node 4 و node 5 جاءت بعد إضافة قيـدين والمكونـة من القيمة الحقيقيـة $X_1 = 4\frac{1}{5}$ القيـد الأول X1 ≤ 4، X1 ≥ 4 وبمـا أن X1 تمثـل قيمتـين جديـدتين حيث تشير إلى تفرع المسألة الفرعية المتمثلة في المرحلة node 2 إلى مسألتين فرعيتين ثانويتين أخـرتين والمتمثلة كما ذكرنا سابقاً بـ node 4، و node 5 نختار عشوائياً node 4 بدلاً مـن node 3 و node 5 لأن node 4 بعد إضافة القد وحل المسألة توصلنا إلى الحل الأمثل integer solution حيث أن قيمة:

$X_2 = 2$, $X_1 = 4$, $Z = 14$

هذا يعني توصلنا إلى حل صحيح وأمثل لدى node 4 وبالرغم من ذلك أننا نسـتمر في إيجـاد الحل لكل من node 3 و node 5 للتأكد من قيمة النتائج التي من الممكن أن تكون أفضل من النتائج التي تم التوصل إليها.

والآن يمكـن اعتبـار أن node 4 والتـي حققـت Z = 14 والمتغـيرين الأساسـيين قـيم عدديـة وصحيحة فيمكن اعتبار أن Z تمثل (Lower bound Z = 14).

المرحلة الثالثة node 3:

ننتقل الآن إلى node 3 والمتفرعة من node 1 رغم الحصـول عـلى نتـائج هـذه المرحلـة بعـد إضـافة X2 ≥ 3 إلى قيـود المسـألة الأساسـية إلا أن إضـافته نجعـل الحـل غـير مناسـب infeasible solution وللتخلص من هذه الحالة نطبق أسلوب dual simplex ونتوصل إلى الحل التالي:

$$Z = 13\frac{1}{2}$$

وهذه القيم أصغر من قيم Z لدى node 4 والمساوية Z = 14 لذا يجب عدم تجزئـة node 3 إلى فروع ثانوية وكما نلاحظ في الرسم فعند إضافة القيدين $X_1 \leq 2$ و$X_1 \geq 3$ كما هو في node 6 و node 7، وعند إضافة قيد X1 ≥ 3 إلى المسألة الفرعيـة المتمثلـة في node 3 جعـل الحـل infeasible مـما يتطلـب تطبيق أسلوب dual simplex للتخلص من هذه الظاهرة وبعد إجراء العمل الـلازم لهـذه الطريقـة يتبـين

عدم إمكانية الحصول على حل مناسب infeasible solution أو بالأحرى no solution هذا يعني أن node 3 لا يحتاج إلى عملية تفريغ أخرى.

الآن بقي لدينا node 5 وأن قيمة 14 2/7 = Z وحدة القيمة هي أكبر من قيمة Z لدى الحد الأدنى Lower bound والمساوية إلى 14 = Z فإن أي تفريغ في هذه النقطة لا تحسن من قيمة Z إلى الأفضل أي (أفضل من 14 = Z) لأن الفرق ما بين Z لدى node 5 وقيمة Z أقل بـ 1 وكل معاملات دالة الهدف أعداد صحيحة فإن أي عملية تفريغ بعد node 6 لا تحسن الحل لذا فإن node 4 يعتبر هو الحل الأفضل والحاصلة على النتائج التالية:

$Z = 14$, $X_1 = 4$, $X_2 = 2$

وهذه العملية حاصلة في التسلسل التالي:

nodes 1 , 2 , 3 , 4 and 5

حسب التسلسل:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 5$

المرحلة الرابعة:

نتحول إلى node 6 والمتفرعة من node 3 وأن النتائج التي تم الحصول عليها في node 6 بعد إضافة القيد $X1 \leq 2$ إلى مجموعة القيود المتمثلة في الحل النهائي للمرحلة node 3 وبعد حل المسألة نحصل على النتائج التالية:

قيمة دالة الهدف:

$Z = 13\frac{1}{3}$, $X_1 = 2$, $X_2 = 3\frac{1}{9}$

نلاحظ هنا قيمة دالة الهدف أقل من قيمة دالة الهدف الأساسية لكن $X_2 = 3\frac{1}{9}$ عدد حقيقي لذا نعتمد على المتغير X2 في تجزئة المسألة الفرعية المتمثلة node 3 إلى مسألتين أخريين وهنا node 8 و node 9 نتيجة تكوين قيمتين ثانويين من القيمة الحقيقية $X_2 = 3\frac{1}{9}$ والبالغة $X_2 \geq 4, X_2 \leq 3$

فإذا تم اختيار node 8 نحصل على الحل الأمثل وصحيح بعد إضافة القيد $X_2 \leq 3$ والنتائج التي

تم الحصول عليها هي: $Z = 13, X_1 = 2, X2 = 3$ هذا يعني تحقق القيمة إلى $Z = 13$ وهذه تسـمى بـ Lower bound is $Z = 13$.

والآن أصبح لدينا node 9 وnode 2 و node 7 التي يجب مقارنتهـا بدلالـة الهـدف $Z = 13$ نلاحظ أن node 9 قيمة $Z = 12$ والتي هي أقل من Z فيمكن إهمالها discarded أما node 7 تهمل أيضاً بسبب عدم وجود حل ملائم.

أما عند node 2 حصلنا على قيمة $Z = 14\ 2/5$ وهـي أكـبر مـن قيمـة Z عـلى الأقـل بوحـدة واحدة والفرعين الثنـائيين المتفـرعين مـن node 2 هـي node 5, node 4 فـإذا أخـذنا node 4 بنظـر الاعتبار لحصلنا على حل أمثل صحيح integer solution فـيمكن (discarded node 5) وأن node 4 أعطت النتائج الصحيحة الأفضل وأن $Z = 14$ (Lower Bound) فإن التسلسل الرقمي يكون:

nodes $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$

ملاحظة: إن النتائج التي تم الحصول عليها من خلال المسائل الفرعية المتمثلة في nodes 4, 8, 9 تعتبر نتائج مثلى لحصولنا على قيم عددية صحيحة للمتغيرين الأساسيين X_2, X_1 مـع ملاحظـة دالـة الهدف للمسائل الفرعية هي عند:

node 4	$Z = 14$
node 8	$Z = 13$
node 9	$Z = 12$

وبالمقارنة يتم اختيـار أفضـل حـل وهـو لـدى node 4 والتـي تعطـي أفضـل قيمـة إلى الحـل والناتجـة باختيـار node 2 أمـا إذا كـان اختيـار node 3 أولاً هـذا يعطـي التفرعـات الثانويـة التاليـة (nodes 6, 7, 8 and 9) للوصول إلى الحل الأمثل والمتمثلة عند $Z = 13$

ملاحظة: إن أحد عيوب طريقة التفريغ والتحديـد Branch and bound تحتـاج في كـل عمليـة تفريـغ إلى حـل المسألة الفرعية بالكامل بأسلوب البرمجة الخطية simplex أو dual - simplex مما يتطلب في المسائل الكبـيرة صرف وقـت

وجهد كبيرين لحلها ولكن بالرغم من ذلك فلا تـزال طريقـة التفريـغ والتحديـد مـن الطـرق الشـائعة الاستعمال في مسائل البرمجة العددية.

سؤال يترك للطالب لتحقيقه:

Consider Figure (5) suppose that the sequence of nodes starts as:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$

Determine all the nodes following node 5 and any lower bound that may result.

مثال (4):

Consider the following linear programming by using branch-and-bound Al gorithem find X_1, X_2, to be integers.

Max $\quad Z = 5X_1 + 4X_2$

Subject to:

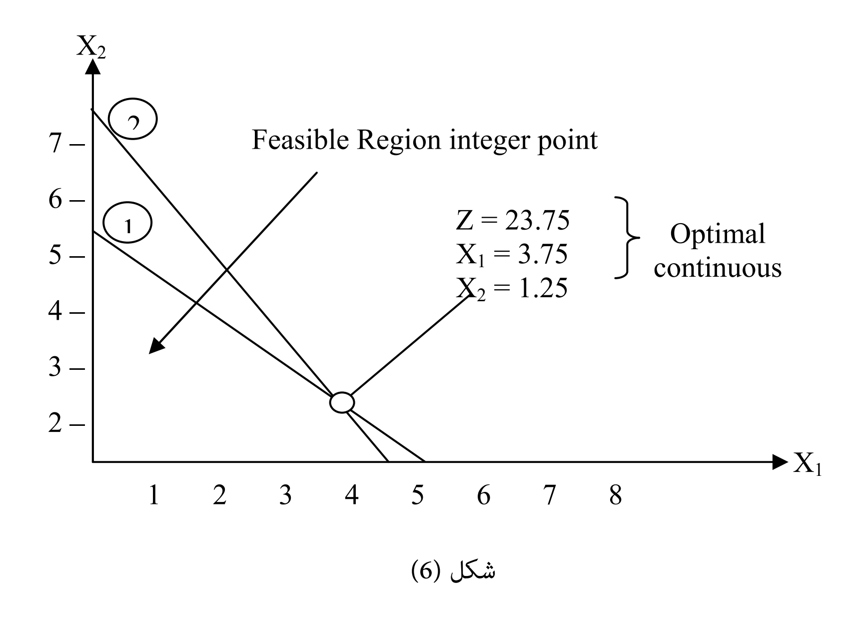
$$X_1 + X_2 \leq 5$$

$$10X_1 + 6X_2 \leq 45$$

X_1, X_2 integer and non negative

Solution:

The graphical solution of the problem is geven bellow:



شكل (6)

هنا كل من X_1 , X_2 Fraction

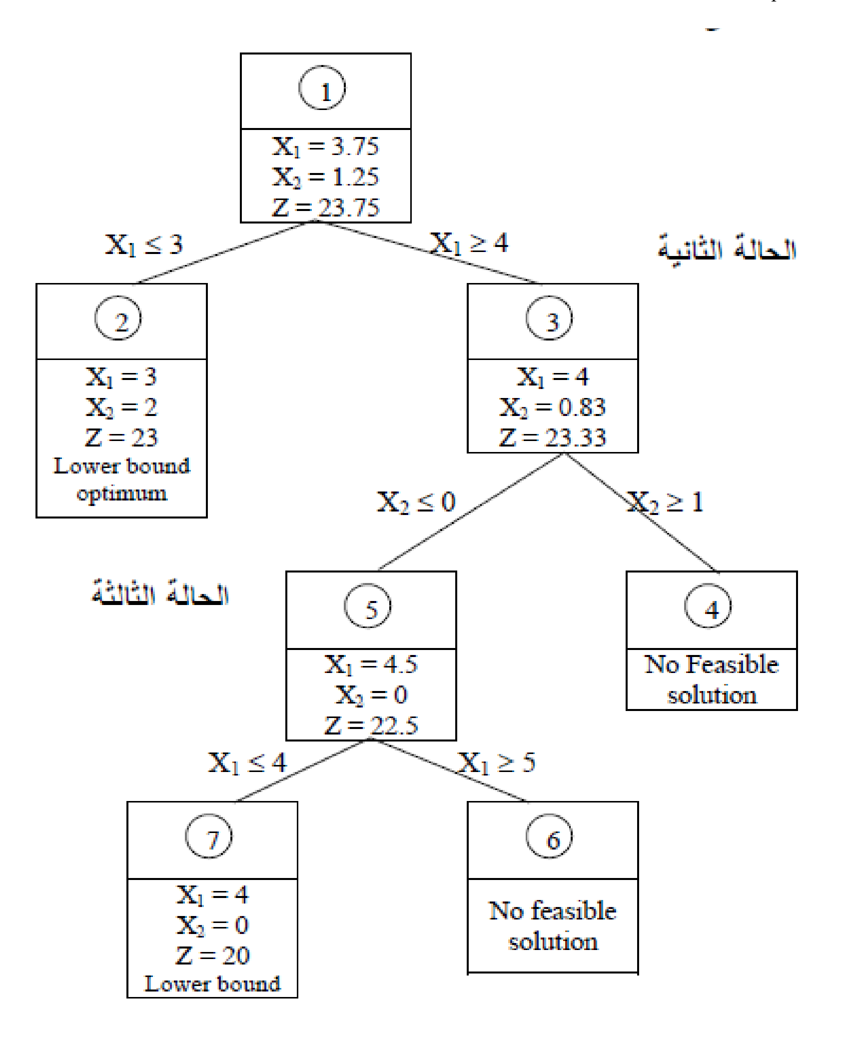
نختار المتغير X_1 والذي كانت قيمته في الحل الأمثل هي:

$X_1 = 3.75$

هذا يعني تطبيق قيد جديد إلى المسألة لتكن:

$X_1 \leq 3$, $X_1 \geq 4$

الحالة الأولى $X_1 \leq 3$



شكل رقم (7)

أسئلة الفصل السابع

1- Solve by the fractional algorithm:

Maximize $Z = 4X_1 + 6X_2 + 2X_3$

Subject to:

$4X_1 - 4X_2 \leq 5$

$-X_1 + 6X_2 \leq 5$

$-X_1 + X_2 + X_3 \leq 5$

X_1, X_2, X_3 nonegatiove integevs

Compare the rounded optimal solution and the integer optimal solution.

2- Solve bye the fractional algorithm:

Maximize $Z = 3X_1 + X_2 + 3X_3$

Subject to:

$-X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 4$

$4X_2 - 3X_3 \leq 2$

$X_1 - 3X_2 + 2X_3 \leq 3$

X_1, X_2, X_3 nonegatiove integevs

3- Show graphically that the problem:

Maximize $Z = 2X_1 + X_2$

Subject to:

$10X_1 + 10X_2 \leq 9$

$10X_1 + 5X_2 \geq 1$

X_1, X_2 nonegatiove integevs

Has no feasible integer solution – verify the solution algebraically by using:

1- The fractional algorithm.

2- brunch – and bound algorith.

4- Consider the problem:

Maximize $Z = X_1 + X_2$

Subject to:

$2X_1 + 5X_2 \leq 16$

$6X_1 + 5X_2 \leq 30$

X_1, X_2 nonegatiove integevs

Find optimal non integer solution graphically by using the branch-and-bound algorith show graphically the successive parallel changes in the Z-value that will lead to the optimal integer solution.

5- In an oil-will – drilling problem there are two attractive drilling sites for reaching four targets (or possible oil wells). The preparation costs at each site and the cost of drilling from sit i to target j (i = 1 , 2 ; j = 1 , 2 , 3 , 4) are given below. The objective is determine the best site for each target so that the total cost is minimized:

	Drilling cost to target				Preparation
Site	1	2	3	4	Cost
1	2	1	8	5	5
2	4	6	3	1	6

Formulate the problem as an integer programming model and suggest a method for obtaiming the optimal solution.

6- Use cutting plane Algorithm to find the optimal integer problem, of the optimal solution is known us:

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	0	0	1	+2/5	-2/5	6
X_2	0	1	0	4/5	-1/5	8 4/5
X_1	1	0	0	-1/5	3/5	5 4/5
Z	0	0	0	-2	-2.5	14 3/5

7- Use branch – and – bound Algorithm to find the optimal solution for:

Manimize $Z = X_1 + X_2$

Subject to:

$$5X_1 + 2X_2 \geq 30$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 14$$

X_1 , X_2 , X_3 nonegatiove integevs

الفصل الثامن

نظرية صفوف الانتظار

Queueing Theory

الفصل الثامن

نظرية صفوف الانتظار

Queueing Theory

8-1 Introduction:

Waiting for service is part of our daily life we wait to eat in restaurants, “we queue up” at the check out counters in grocery stores, and we “lineup” for service in post offices. And the waiting phenomenon is not an experience limited to human being only; Jobs wait to be processed on a machine, planes circle is astack before given permission to land at an airport, and car stops at traffic lights. Now the question why we study. “queues”? the study of queues deals with quantifying the phenomenon of waiting in lines using respresentative measures of performance, such as average queue length, average waiting time in queue, and average facility utilization, the waiting phenomenon is the direct result of randomness in the operation of service facilities. In general, the customer’s arrival and his or her service time are not known in advance; for otherwise the operation of the facility could be scheduled in a manner that would eliminate waiting completely.

Our object of studing queue is “the operation of a services facility under random condition is to secure some characteristices that measure performance is how long a customer is expected to wait before being servied, “system from the customer’s stand point” or the percentage of time service facility is not used. “Evaluates the degree of utilization of the facility”. These measures of performance may be used to select the level of services (service rate) that will strike a reasnable balance between the two conflicting situations.

الانتظار حالة يمر بها معظم الناس ويلاحظها، والتي تصادفنا خلال حياتنا اليومية وبشكل واضح في قطاع الخدمات مثلاً، فتراهم في مواقف الباصات أو أمام شبابيك الحجز وكذلك مثل الصفوف عند الصراف الآلي في بنك أو صفوف السيارات عند الإشارة الضوئية أو انتظار المسافرين في المطار والموانئ ومحطات القطار وكذلك الطائرات وهي تحوم في الجو انتظاراً للهبوط. وكذلك في مراكز توزيع البريد حيث الرزم والرسائل المكدسة.

وكثيراً من الأمثلة يمكن التطرق لها وكذلك لو ننظر إليها من جانب آخر أي جانب الصناعات وأمور التجارة كذلك، ويلاحظ الشخص أن كلاً من هذه الحالات وغيرها تؤدي إلى وجود مشكلة الانتظار، إذن نظرية صفوف الانتظار Queueing Theory تعتبر ذا أهمية خاصة في تحليل أوقات الانتظار الغير مرغوب فيه بالنسبة إلى الزبون، لأنه يرغب بإنجاز عمله والمغادرة سريعاً وكذلك النظر إلى الجانب الآخر (الكلف) أي التكاليف الناجمة عن الانتظار والتشغيل مثلاً إذا كان عدد الزبائن في صفوف طويلة في بنك ما فإن المدير يعالجه بفتح خط إضافي (شباك) لتقديم خدمة جديدة ولكن ذلك يؤدي لتكاليف إضافية، إذاً على المدير الموازنة بين الجانبين عند المعالجة.

تهدف نظرية الانتظار Queuing theory والتي يكون فيها الانتظار على شكل صف queue إلى تحديد الفترة الزمنية للانتظار على المدى البعيد وجعل الفترة أقل ما يمكن. وكذلك تحويل فترة الانتظار إلى مقياس مادي وهي تكلفة الانتظار ودراسة أسلوب الموازنة بين تكلفة الانتظار وتكلفة اتخاذ القرار لتقليل وقت الانتظار.

يتضمن الحل لمسألة صفوف الانتظار وبشكل عام الأمور التالية:

1- تحليل مسبق للمنظومة.

2- فحص نماذج الوصول وأوقات الخدمة.

3- وضع مقاييس لأداء وكفاءة المنظومة.

ويمكن حل بعض الحالات باستخدام مجموعة من المعادلات التي تتحكم بحركة المنظومة والحصول على حلول واضحة ومحددة ولكن تظهر أحياناً بعض الحالات المعقدة يتطلب حلها إجراء دراسة محاكاة لها simulation.

8-2 عناصر نظم الانتظار Basic Elements of Queueing Model:

From the stand point of a queueing model, a waiting – line situation is created in the following manner:

1- arrivals at facility.

2- service discipline.

3- queue size.

4- rolse of services.

لدراسة وتحليل نظم الانتظار ينبغي معرفة عناصره الأساسية والتي يمكن توضيحها:

1- نمط الوصول Arrivals at facility: ويقصد به معدل الوقت time الذي يصل فيه طالب الخدمة إلى مركز الخدمة وهذا النمط إما يكون عشوائي أو ثابت ومحدد.

2- نمط تقديم الخدمة Service disipline: متوسط الوقت اللازم لتقديم الخدمة وهو أيضاً عشوائي أو ثابت services in rundom order.

3- طاقة النظام Queue size: ويقصد بها مجموعة طالبي الخدمة والمتمثلة بـ(المنتظرون في الخط والذين يتلقون الخدمة) وهذه تكون محدودة أو غير محدودة.

4- قواعد تقديم الخدمة Roles of services: وهي الأسس التي بموجبها ينتظم خط الانتظار وتحدد معايير تقديم الخدمة ومنها:

1- الواصل أولاً يخدم أولاً

(first come first served) FCFS

2- الواصل الأخير يخدم أولاً

Last come first served (LCFS)

3- قاعدة الخدمة العشوائية (صف غير منتظم)

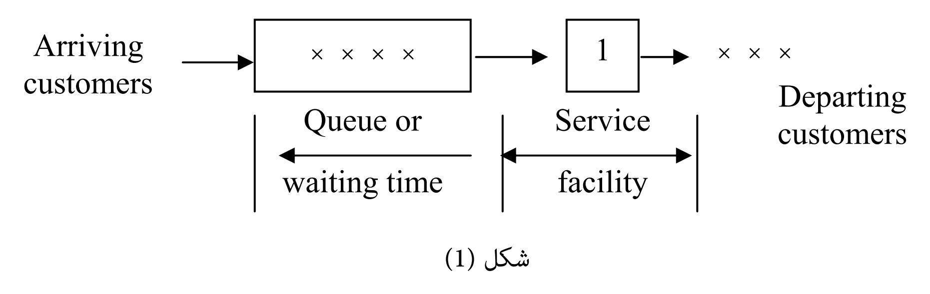
Service in Rundom order (SIRO)

8-3 أنواع أنظمة الانتظار Type of Queueing Model:

هناك أربعة أشكال أساسية لمواقف صفوف الانتظار تمثل في حد ذاتها الإطار العام لصف الانتظار ومركز أداء الخدمة.

1- صف انتظار واحد ومركز خدمة واحدة. ومثال على ذلك ورشة تصليح السيارات فيها مصلح واحد محل حلاقة فيه حلاق واحد ويسمى مثل هذا الشكل

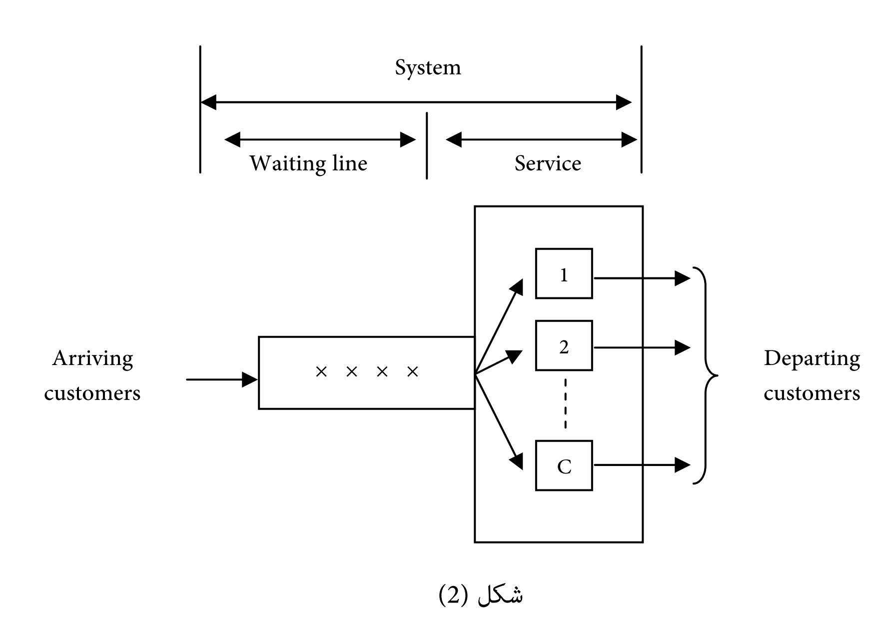
مركز أداء خدمة واحد وبمرحلة واحدة. ويمكن توضيح النظام كما في الشكل التالي:



شكل (1)

نظام انتظار ذو مركز أداء خدمة واحد وخط انتظار واحد

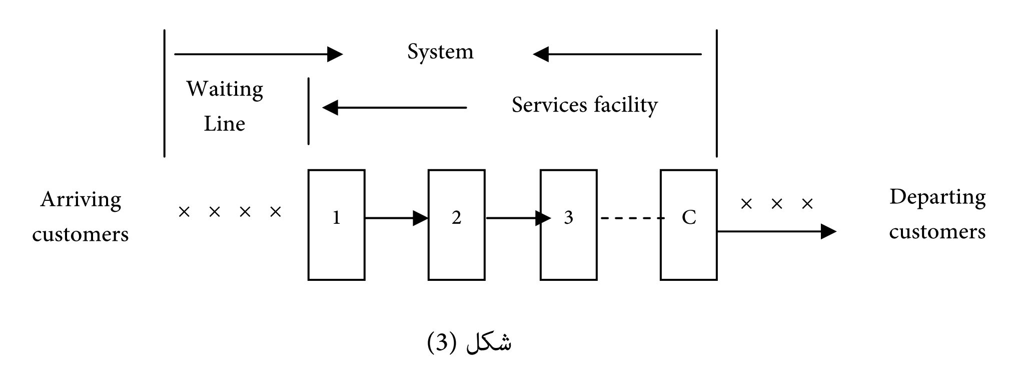
2- مراكز أداء خدمة متعددة وبمرحلة واحدة. في هذه الحالة مراكز الخدمة متعددة، فيمكن الزبون الحصول على الخدمة من أي شباك أو وحدة كما في البنوك. والشكل التالي يبين طبيعة الخدمة.



شكل (2)

نظام انتظار مراكز خدمة متعددة

3- نظام انتظار ذو مراكز أداء خدمة واحدة وبمراحل متعددة. كما في خطوط الإنتاج عند معالجة البضاعة في عدة مراحل وبتسلسل تتابعي. أو كما في إنجاز المعاملة في دائرة خدمية معينة بعد مرورها بكل الإجراءات الروتينية اللازمة لها. كما في الشكل أدناه:



شكل (3)

تعدد مراحل الخدمة

8-4 مقاييس الأداء Measures of performance:

نماذج صفوف الانتظار تكمن في التنبؤات الكمية المهمة في الأوضاع الافتراضية للانتظار. وهناك خصائص مهمة ذو الطبيعة الإحصائية والتي تمثل مقاييس الأداء التالية:

1- وقت الانتظار (waiting) ويمثل بالوقت المحصور بين الانضمام للصف وإكمال الخدمة (arrival and departure) فإذا كان الزمن يرمز له بـ t و t + h فإن h تعتمد على طول فترة الانتظار.

2- وقت الاصطفاف (queueing) ويمثل الوقت المحصور بين الانضمام إلى الصف وبداية الخدمة.

3- طول الصف والمتمثلة في عدد الصفوف في النظام عدا الصف أي في الخدمة.

4- منفعة مؤدى الخدمة وهو جزء من الوقت الكلي اللازم لتشغيل النظام.

5- الفترات المشغولة والمتمثلة بالوقت الذي يكون فيه مؤدي الخدمة مشغولاً.

وبسبب الطبيعة الاحتمالية لكل من نماذج الوصول arrival أو ميكانيكية الخدمة تمثل مقياس الأداء أعلاه.

ومن الواضح أن وقت الانتظار المتوقع Expected waiting time أو طول الصف المتوقع Expected to wait before being servied أو منفعة مؤدي الخدمة traffic-intensity تشكل معلمات parmeters مهمة تؤشر سلوك المنظومة.

لذا فهناك نماذج رياضية مختلفة لصفوف الانتظار وكما لاحظنا سابقاً، وسوف نتطرق إلى بعض من هذه النماذج modeds والتي تكون ذا أهمية في تطبيقاتنا العملية ويمكن استخدام توزيع بواسون Poisson distribution والتوزيع الأسي Exponential distribution والتي تكون مهمة وتلعب دوراً في كلا الحالتين (arrivals, service time) في أكثر حالات صفوف الانتظار ويمكن إعطاء صورة مبسطة عن توزيع بواسون:

$$Pn^{(t)} = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad n = 0 , 1 , 2 \ldots\ldots$$

وكذلك التوزيع الأسي:

$$f(T) = \alpha \ e^{-\alpha T} \qquad T > 0$$

حيث:

T = the time interral

α = rate at which the rent are generated.

وفيما يلي وصف كامل عن التوزيعين في الجزء 5-8 وكيف تم التوصل إليها.

8-5 توزيع بواسون والتوزيع الأسي:

Roles of the Poisson and Exponention Distributions

Consider the queueing situation in which the number of arrivals and departures (those served) during an interval of time is controlled by the following conditions:

Condition 1: The probability of an (arrival or departure) occuring between times t and t + h depends on the length of h. which it mean the probability function has stationary independent.

Condition 2: The probability of an event occuring during a very small time interval h is positive but less than 1.

Condition 3: At most one event can occure during very small time interval h.

ومن أجل العمـل في هـذه الشروط لا بـد مـن تطـوير صـيغ رياضـية تـؤدي إلى اتخـاذ القـرار الصائب ولذلك نفترض ما يلي:

ومن الشرط الأول (Condition 1) أن $Pn^{(t)}$ (has stationary independent) عنـدما $n = 0$

ويمكن القول أن الشرط الأول يمكن التعبير عنه كما يلي:

$$Po^{(t+h)} = Po^{(t)}\ Po^{(h)}$$

وباستخدام الشرط الثاني (Condition 2) والذي يجب أن يكون $Po^{(h)}$:

$0 < Po^{(h)} < 1$ على شرط h صغيرة جداً

فإن:

$$Po^{(t)} = e^{-\alpha t} \qquad t \geq 0$$

علماً بأن α موجبة وثابتة α = positive constant

ويمكن اعتبارها تمثل معدل الوصول أو المغادرة في وحدة الزمن

(rate of arrival or departures perunit time).

لذا فيمكن التعويض عنها بـλ.

$$Po^{(t)} = e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$$

λ معدل عدد الوحدات الواصلة أو المغادرة، فإذا كانت $h > 0$ وصغيرة جداً فإن:

$$Po^{(h)} = e^{-\lambda h}$$

$$= 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + ...$$

$$= 1 - \lambda h$$

وهذا يعني إذا كان عدد الوحدات في الفترة الزمنية t هو h وكذلك في الفترة الزمنية t+h.

هذا يعني عدم وصول وحدات جديدة إلى النظام وعـدم مغـادرة النظـام، بكـلام آخـر وحـدة واحدة وصلت ووحدة واحدة غادرت فإن احتمال عدم وصول ولا وحدة إلى النظام هي:

$$1 - \lambda h$$

فإن $1 - \mu h$ تعني احتمال عدم مغادرة ولا وحدة.

وبما أن الشرط الثالث (Condition 3) للنظام الذي يسمح باحتمال وحدة واحـدة أو مغـادرة وحدة واحدة هذا يعني أن:

$$P_1^{(h)} = 1 - P_0^{(h)} = \lambda h \quad \text{or} \quad \mu h$$

لذلك فإن الاحتمال الذي يتحكم في النظام هو:

$$\lambda h \, , \, \mu h \, , \, P_n^{(t)}$$

وأن h كمية صغيرة جداً تقترب إلى الصفر

فإن λh هو احتمال وصول وحدة واحدة إلى النظام

أما $1 - \mu h$ احتمال عدم مغادرة أية وحدة للنظام.

ويمكن النظر إليها من جانبين:

1- Arrivals process:

بما أن هدفنا هو التوصل إلى صيغة للاحتمال $P_n^{(t)}$ لـ n من الوحدات التي تصل النظام في الفترة الزمنية t وبما أن جميع الاحتمالات تقترب من الصفر

$$P_n^{(t+h)} = P \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{arrivals during t and none during h} \\ n-1 & \text{arrival during t and one during h} \end{array} \right\}$$

thus:

$$P_n^{(t+h)} = P_n^{(t)} P_0^{(h)} + P_{n-1}^{(t)} P_1^{(h)} \qquad n = 1 , 2 \, ...$$

$$P_0^{(t+h)} = P_0^{(t)} P_0^{(h)} \qquad n = 0$$

وكما ذكرنا سابقاً أن:

$$P_0^{(h)} = e^{-\lambda h}$$

$$P_1^{(h)} = 1 - P_0^{(h)}$$

وبما أن h صغيرة جداً

$$P_0^{(h)} \cong 1 - \lambda h \qquad\qquad P_1^{(h)} \cong \lambda h$$

ويمكن كتابة المعادلتين كما يلي:

$$P_n^{(t+h)} \approx P_n^{(t)} (1 - \lambda h) + P_{n-1}^{(t)} \lambda h \qquad n > 0$$

$$P_0^{(t+h)} \cong P_0^{(t)} (1 - \lambda h) \qquad n = 0$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة كما يلي:

$$\frac{P_n^{(t+h)} - P_n^{(t)}}{h} \cong -\lambda P_n^{(t)} + \lambda P_{n-1}^{(t)}$$

$$\frac{P_0^{(t+h)} - P_0^{(t)}}{n} \approx -\lambda P_0^{(t)} \qquad n = 0$$

وإذا أخذنا المعادلة من وجهة نظر رياضية وأن h تقترب من 0 وبأخذ المشتقة لها بدلالة t فإن:

$$\frac{dP_n^{(t)}}{dt} = \underset{h \to 0}{Lim} \; \frac{P_n^{(t+h)} - P_n^{(t)}}{\lambda}$$

المشتقة غاية

أي أن:

$$P_n^{\backslash}(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$P_0^{\backslash}(t) = -\lambda P_0(t)$$

ومن هذه المعادلتين والمتمثلة بالمشتقة يمكن إعطائها بالشكل التالي:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad n = 0 , 1 , 2$$

فهذا يعني أن $P_n(t)$ تتوزع توزيع Poisson بوسط حسابي λt وتباين λt أيضاً.

أما خلاصة ما توصلنا إليه:

The interarrival times is exponential with mean $\frac{1}{\lambda}$, the number of arrivals during time interval t is poisson with mean λt.

مثال (1):

Consider the state health department. Suppose that the birth in the state are spaced over time according to an exponential distribution and that the everage time between successive births is 2 hours.

Solution:

لتحليل هذه الحالة نحن نعلم أن الفترة الزمنية ما بين ولادة وأخرى هي 2 ساعة لذا فإن:

$$\lambda = \frac{24}{2} = 12 \text{ births/day}$$

معدل عدد الولادات في اليوم الواحد

ولمعرفة عدد الولادات في السنة تكون:

λt = 12 × 365 = 4380 records/ year

أما في حالة عدم تسجيل أي ولادة هذا يعني أن:

$$P_0(1) = \frac{(12 \times 1)^0 e^{-12\times 1}}{0!} = e^{-12} = 0.000006$$

وهكذا يمكن حساب احتمال أي عدد من الولادات.

2- Departures process:

أما في حالة المغادرة لو فرضنا أن النظام يبدأ بعدد من الوحدات ولتكن N، وأن μ تمثل معدل بعد أداء الخدمة في حالة عدم السماح لوحدة جديدة أن تدخل النظام. ويمكن إعطاء اسم لهذه العملية بـPure death.

وثم استخدام pure death في عملية جرد البضائع وسندات، والموجودات في المخزن حيث موجودات في المخزن اعتبرت مساوية إلى N في بداية الفترة وأن عملية سحب أو جرد البضائع خلال الفترة الزمنية بمعدل μ للوحدة خلال الزمن. فإنه يمكن تمثيل العملية كما يلي:

$q_n(t)$ = احتمال n من الوحدات المغادرة خلال الفترة t

كما في الحالة arrivals فإن h تقترب من الصفر h > 0 أي أن h صغيرة جداً. فإن:

$$q_0(h) = e^{-\mu h} \cong 1 - \mu h$$
$$q_1(h) = 1 - q_0(h) \cong \mu h$$

ويمكن عرض المعادلتين أعلاه بدلالة $q_n\ (t+h)$

ويمكن صياغتهما كما يلي:

$$q_N\ (t+h) \cong q_N^{(t)} \cdot 1 + q_{N-1}^{(t)}\ \mu h \qquad n = N$$

$$q_n\ (t+h) \cong q_n^{(t)}\ (1 - \mu h) + q_{n-1}^{(t)}\ \mu h \qquad 1 \leq n < N$$

$$q_0\ (t+h) \cong q_0^{(t)}\ (1 - \mu h) \qquad n = 0$$

من المعادلة الأولى يمكن ملاحظة أن N تمثل كل الموجودين في النظام غادره خلال الفترة t أما احتمال عدم المغادرة في الفترة القصيرة h مساوية إلى الواحد.

يمكن أخذ اللوغاريتم لهذه المعادلة وباستخدام المشتقة بدلالة t ولكل الحالات فإن:

$$\frac{dq_N^{(t)}}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{q_N^{(t+h)} - q_N^{(t)}}{h}$$

فنحصل على:

$$q_N^{\backslash}(t) = \mu q_{N-1}(t) \qquad n = N$$

$$q_n^{\backslash}(t) = -\mu q_n(t) + \mu q_{n-1}(t) \qquad 1 \leq n < N$$

$$q_0^{\backslash}(t) = -\mu q_0(t) \qquad n = 0$$

ومن هذه المعادلات يمكن أن نتوصل إلى قاعدة توزيع بواسون وكما يلي:

$$q_n(t) = \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}\ , \qquad n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ....\ N-1$$

$$q_N(t) = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} q_n(t)\ , \qquad n = N$$

علما بأن $q_n(t)$ تمثل:

احتمال مغادرة n وحدة للنظام في الفترة t: $q_n(t)$

في بعض الأحيان يمكن التحدث عن بقاء عدد من الوحدات في النظام بعد الفترة t والحصول على مثل هذا النوع من الاحتمالات علينا أن نعرف أن:

احتمال n من الوحدات باقية في النظام بعد الفترة t = $P_n(t)$

وبما أن النظام ابتدأ من N من الوحدات Customers وأن n تمثل الباقين في النظام بعد الفترة t وهذا يمكن التعبير عنه بـ N - n

فإن (الوحدات المغادرة في الفترة t) = N - n

فإن: $P_n(t) = q_{N-n}(t)$

وهذا يمكن تفسيرها كما يلي:

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!} \quad , \qquad n = 0 , 1 , 2 \ldots N$$

$$P_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^{N} P_n(t)$$

وإليك المثال التالي:

مثال (4):

At the beginning of each week, 15 units of an inventory item are stocked for use during the week. With drawals from stock occur only during the first 6 days (business is closed on Friday) and follows apoisson distribution with mean 3 units/day. When the stock level reaches 5 units, a new order of 15 units is placed for delivery at the beginning of next week. Because of the nature of the item, all units left at the end of the week are discarded.

Solution:

هنا قيمة μ معلومة وتساوي 3 وحدة في اليوم ولحساب الاحتمال للخمس وحدات وباستخدام توزيع بواسون في حالة المغادرة والوحدات الباقية هي:

$$P_n(t)=\frac{(\mu t)^{N-n}e^{-\mu t}}{(N-n)!}\ ,\qquad t = 1 , 2 .... 6$$

ولحساب احتمال وجود 5 وحدات (level order):

$$P_5(t)=\frac{(3t)^{15-5}e^{-3t}}{(15-5)!}$$

وعندما t مساوية إلى أيام الأسبوع أي:

t = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

وهذه واضحة كما في الجدول التالي والذي يمثل الاحتمال للفترة 6 أيام

(days)	1	2	3	4	5	6
μt	3	6	9	12	15	18
$P_5(t)$	0.0008	0.0413	0.1186	0.1048	0.0486	0.015

ومن الجدول أعلاه نلاحظ أن عملية إعادة الطلب تكون عندما t=3 وتنخفض بعد ذلك.

8-6 صفوف الانتظار (الوصول والمغادرة):

Queues with Combined Arrivals and Departures

ندرس هنا الأنظمة التي تكون مشتركة ما بين الوصول والمغادرة وكما وصفنا سابقاً هناك أنواع مختلفة من تقديم الخدمة في حالة وجود صف انتظار واحد وطبيعة الخدمة تكون إما بشكل صف واحد أو نظام التوازي (Parallel servers) ويرمز لها بـ C حيث C تمثل عدد الوحدات المستفيدة من الخدمة وأن كل المخدومين يقدم لهم نفس الخدمة من وجهة نظر الزمن.

ويمكن تفسير بعض الفرضيات في حالة ثابتة للنظام تسمى Steady-state (الاستقرار) ويمكن تحديد المقاييس منها:

Pn = (Steady-state) احتمال n من الوحدات في النظام (احتمال الاستقرار)

Ls = عدد الوحدات المتوقعة في النظام

Lq = عدد الوحدات المتوقعة في الصف

Ws = الوقت المستغرق في النظام (في صف + في الخدمة)

Wq = الوقت المتوقع في صف الانتظار

فيمكن التعبير عن تلك المقاييس وباستخدام القواعد:

$$Ls = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$$

$$Lq = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)P_n$$

وبما أن هناك علاقة متينة ما بين كل من Ls و Ws وكذلك Lq و Wq فيمكن تحديد المقاييس

وباستخدام قيمة λ معدل الوصول (arrival rate) نحصل على:

$$Ls = \lambda\ Ws$$

$$Lq = \lambda\ Wq$$

وهذه القاعدة تستخدم في الحالة الاعتيادية أما في بعض الحالات (خاصة) عند وصول الزبون بمعدل λ لكن ليس كل من وصل يمكن أن يدخل النظام (not all arrives can join the system) وهذا يحدث في بعض الحالات عندما يكون هناك حد في عدد الوحدات في النظام (Limit on maximum number in system) فيجب إعادة صياغة المعادلة بالنسبة إلى λ والأخذ بنظر الاعتبار هؤلاء الذين هم فعلاً موجودين في النظام

λ_{cff} (effective arrival rarte for those who join the system)

فإن:

$$Ls = \lambda_{eff}\ Ws$$

$$Lq = \lambda_{eff}\ Wq$$

وهذا يمكن التعبير عنها كما يلي:

الوقت المتوقع في النظام = (الوقت المتوقع في الصف + الوقت المتوقع للخدمة)

علماً بـأن μ = معـدل الخدمـة فـإن $\frac{1}{\mu}$ الوقـت المتوقـع للخدمـة expected service time

فيمكن بناء العلاقة التالية:

$$Ws = wq + \frac{1}{\mu}$$

بضرب الطرفين بـλ نحصل على:

$$Ls = Lq + \frac{\lambda}{\mu}$$

ملاحظة:

$\frac{\lambda}{\mu}$ تمثل نسبة معدل وصول الوحدات إلى معدل أداء الخدمة في وحدة الزمن فيمكن التعبير عن $\frac{\lambda}{\mu}$ بكثافة الحركة (Traffic – Intensity).

فإذا تم تعويض λ_{cff} بدلاً عن λ فيمكن أن تحدد قيمة كل من Ls و Lq كما يلي:

$$\lambda_{cff} = \mu\,(L_s - L_q)$$

ويمكن صياغة الاحتمال Pn في كل نماذج الانتظار:

$$P_n \rightarrow Ls = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \rightarrow Ws = \frac{Ls}{\lambda} \rightarrow Wq = Ws - \frac{1}{\mu} \rightarrow Lq = \lambda Wq$$

للعلم إن مقياس قيمـة P_n لكـل نمـاذج الانتظـار تكـون سـهلة أمـا حسـاب توزيعـات ووقـت الانتظار هي التي تكون معقدة. لذا يجب الأخذ بنظر الاعتبار كل المقاييس من Ws و Wq من خـلال Ls و Lq والمثال التالي يوضح بعض المقاييس:

مثال (5):

Consider the queueing situation with one server in which arrivals occur at the rate λ = 3 per hour and service is performed at the rate μ = 8 per hour. The probabilities of P_n of n customers in the system are computed for the situation as given in the following table:

n	0	1	2	4	5	6	7
P_n	0.625	0.234	0.033	0.012	0.005	0.002	0.001

Find:

1- The expected number of customers in the system.

2- The expected waiting time in the system.

3- Expected waiting time in the queue.

4- Expected number of customers in the queue.

Solution:

1- Ls = $\sum_{n=0}^{\infty} nP_n$

= 0 × 0.625 + 1 × 0.234 + 2 × 0.033 + 4 × 0.012 + 5 × 0.005

+ 6 × 0.002 + 7 × 0.001

= 0.6 customers

2-

بما أن $\lambda = 3$ فيمكن إيجاد قيمة W_s

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{0.6}{3} \cong 0.2 \text{ hour}$$

3- $W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 0.2 - \frac{1}{8} = 0.075$ hour

$L_q = \lambda\ W_q = 3 \times 0.075 = 0.225$ hour

ويمكن حساب L_q بأسلوب آخر وذلك:

$$L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_n = 0.225$$

حاول أن تستخرج هذه القيمة بالتعويض.

ويمكن حساب المنفعة أي العدد المتوقع في الخدمة والمساوية إلى $\frac{\lambda}{\mu}$ أو يمكن حسابها كما يلي:

$L_s - L_q = 0.6 - 0.225 = 0.375$

ويمكن صياغة الفرضيات السابقة بشكل رياضي، ومن أجل دراسة نظم صفوف الانتظار ولنتمكن من الحصول على صورة واضحة وثابتة عن طبيعة النظام. فإذا كانت t تقترب إلى رقم كبير جداً ولنفرض أنها تقترب إلى $t \rightarrow \infty$ فإن $P_n(t)$ تكون مستقلة عن الزمن t أي:

$$P_n(t) \underset{t\rightarrow\infty}{\rightarrow} P_n$$

وكذلك $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

ومن هذا المنطلق يمكن حساب كل من Ls و Ws و Lq و Wq كما يلي:

عندما $n = 0$

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

أما إذا كانت $n = 1$

$$0 = \lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + \mu P_2$$

وبعد التعويض عن P_1 بما تساويها نتوصل إلى قيمة P_2 وهكذا .... P_n حيث:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

وبما أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي إلى الواحد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

هذا يعني:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

أو:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \qquad ; \qquad \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

وكما عرفنا سابقاً أن $\frac{\lambda}{\mu}$ تمثل Traffic-Intensity ومن أجل تسهيل العمل الحسابي افـرض أن

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\rho_n = \rho^n (1 - \rho)$$

فإن عدد الوحدات المتوقعة في النظام Ls هي:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n (1-\rho)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad ; \qquad \rho < 1$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

أما لحساب قيم Ws الوقت المستغرق في النظام:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

$$W_s = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

وكذلك يمكن حساب L_q عدد الوحدات في الصف:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

أما لحساب W_q الوقت المتوقع من صف الانتظار:

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

ويمكن حساب المثال السابق لوحدات القياس بالأسلوب أعلاه (يترك للطالب).

مثال (6):

هناك هاتف واحد للاتصالات الخارجية في دائرة البريد في جامعة عمان الأهلية، حيث يكون وصول المستفيدين (طلاب) عشوائياً وبمتوسط 8 دقائق بين واحد وآخر. علماً بأن الفترة المستغرقة تتبع التوزيع الأسي وبمتوسط خمس دقائق.

أوجد:

1- احتمال كون الخط مشغول.

2- ما متوسط طول صف الانتظار.

Solution:

نحسب أولاً عدد المستفيدين في الدقيقة λ

$$\lambda = \frac{1}{8}$$

بما أن الخدمة تنتهي لكل مستفيد بعد 5 دقائق فإن:

$$\mu = \frac{1}{5}$$

احتمال أن الخط مشغول = $\frac{\lambda}{\mu}$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{8}$$

∴ نسبة انشغال الخط يكون مساوي إلى 62.5%.

2- متوسط طول صف الانتظار:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right)} = \frac{25}{24}$$

هذا يعني هنا طالب واحد في صف الانتظار.

مثال (7):

إن وصول السيارات إلى ورشة التصليح تتبع توزيـع بواسـون وبمعـدل سـيارتين في السـاعة وأن متوسط إبداء الخدمة هو 20 دقيقة موزعة بصورة تقريبيـة حسـب التوزيـع الأسي. وأن كلفـة انتظـار السيارة الواحدة 5 دولار في الساعة.

احسب:

1- متوسط عدد السيارات المتوقعة في النظام.

2- متوسط الوقت المستغرق في النظام لكل سيارة.

3- متوسط طول صف الانتظار.

4- الكلفة الكلية للانتظار في النظام لـ8 ساعات عمل.

Solution:

$\lambda = 2$ في الساعة

$$\mu = \frac{60}{2} = 3$$

1- متوسط عدد السيارات المتوقعة في النظام:

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{3-2} = 2$$

2- متوسط الوقت المستغرق في النظام:

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3-2} = 1$$

3- متوسط طول صف الانتظار:

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{2^2}{3(3-2)} = \frac{4}{3}$$

4- الكلفة الكلية = عدد السيارات في النظام × وقت الانتظار لكل سيارة

× 8 × تكلفة انتظار الساعة

$2 \times 1 \times 8 \times 5 = 80\$$

8-7 منظومات صفوف الانتظار:

في هذا الجزء سوف نعالج بعض جوانب صـفوف الانتظـار آخـذين بنظـر الاعتبـار المنظومـات التالية:

8-7-1 منظومة $M/M/1/\infty$:

في هذه المنظومة يصل العملاء عشوائياً لغرض الخدمة، وهناك مؤدي خدمـة واحـد ولا توجـد قيـود عـلى النظـام (no limit on the capacity of the system) وأن توزيـع الخدمـة (الوصـول أو المغادرة) بواسون، وأن معدل الوصول يساوي λ ومعـدل متوسـط الخدمـة يسـاوي μ أمـا المعـادلات والعلاقات الرياضية اللازمة لهذه المنظومة هي (بدون الدخول إلى برهنتها).

$$Pn = (1 - \rho)\,\rho^{n} \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

حيث: $P_0 = 1 - \rho$ وأن $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$

$$Ls = \frac{\rho}{1-\rho}$$

كما نعلم أن $Ls = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$

$$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$Ws = \frac{Ls}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

مثال (8):

In a car-wash service facility, information gathered indicates that cars arrive for service according to a poisson with mean 5 per hour. The time for washing and cleaning each car varies but is found to follow an exponential distribution with mean 10 minutes per car. The facility cannot handle more than one car at a time.

Solution:

لحل هذه المسألة نستخدم منظومة صفوف $M/M/1/\infty$ ويمكن أن نعتبر أن النظام كبير أي لا توجد قيود على حجم الصف وهناك مساحة واسعة يمكن أن تحتمل وصول أي عدد من السيارات.

هنا:

$$\lambda = 5$$ سيارة في الساعة

$$\mu = \frac{60}{10} = 6$$ سيارة في الساعة

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} < 1$$

طبعاً النظام تحت منظومة الحالة الساكنة steady-state condition

ولمعرفة عدد مواقف السيارات الممكنة للسيارات القادمة فيجب حساب قيمة Lq

$$Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{1}{6}} \approx 4$$ سيارات

ونحن نعرف أن Lq هو العدد المتوقع من السيارات في المواقف أي قيمة احتمالية فيمكن القول أن عدد السيارات يمكن أن تكون أكبر من 4 أو أصغر من 4 سيارات.

ويمكن إيجاد قيمة Ws الزمن المتوقع للانتظار هو:

$$Ws = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{6(1-\frac{5}{6})} = 1 \text{ hour}$$ ساعة واحدة

مثال (9):

تصل السفن عشوائياً إلى ميناء العقبة، ويبلغ معدل وقت تفريغ الحمولة يوماً واحداً وموزع بشكل التوزيع الأسي. فإذا كان أسبوع العمل 6 أيام احسب التوزيع لوقت الانتظار (السفن) في كل من الحالات التالية:

1- معدل الوصول لكل 3 سفن في الأسبوع.

2- معدل الوصول لكل 5 سفن في الأسبوع.

Solution:

بما أن وصول السفن يكون عشوائياً وقت التفريغ يتبع التوزيع الأسي هذا يعني أن توزيع وقت الانتظار أيضاً بأخذ التوزيع الأسي أيضاً:

$$Ws^{(t)} = \rho \ (\mu - \lambda)\ e^{-t(\mu - \lambda)}\ dt$$

وبمعدل

$$W_s = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

1- $\lambda = \frac{3}{6}$ باليوم

$$\mu = 1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

لذا فإن:

$$W^{(t)} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})\ \ e^{-t(1-\frac{1}{2})} dt$$

$$= \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$Ws = \frac{\frac{3}{6}}{1(1-\frac{3}{6})} = \frac{1}{2} - \frac{2}{1} = 1$$

2- $\lambda = \frac{5}{6}$

$$\mu = 1$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$$

توزيع وقت الانتظار يساوي إلى:

$$W^{(t)} dt = \frac{5}{6}(1-\frac{5}{6})\ \ e^{-t(1-\frac{5}{6})} dt$$

$$= \frac{5}{36} e^{-\frac{t}{6}} dt$$

لذا فإن وقت الانتظار:

$$Ws = \frac{\rho}{(1-\rho)\mu}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{(1-\frac{5}{6})1} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{1} = 5$$ أيام

8-7-2 منظومة M/M/1/N:

وهذه المنظومة تشبه المنظومة M/M/1/∞ عدا كون العدد في هذه المنظومة عدد الوحدات فيها تساوي إلى N (N maximum queue length N = N-1). وهذا يعني أن عدد الوحدات (العملاء) N الموجودين في المنظومة والتي وصلت حديثاً يعبر عنها بـbalk أو لا يسمح لهم بالدخول. فإن هذا يؤثر على معدل الوصول λ_{eff} فتكون أقل من λ.

وباستخدام المعادلات التفاضلية عندما 0 = n و N > n > 0 تكون مماثلة للحالة (M/M/1/∞) منظومة 8-7-1. أما في حالة n > N فإن $P_h(t) = 0$ وفي حالة n = N نحصل على:

$$P_N^{(t+h)} \cong P_N^{(t)}(1)(1-\mu\lambda) + \rho_{N-1}^{(t)}(\lambda h)(1-\mu\lambda) \quad , \qquad n = N$$

وكما توصلنا إليه من المنظومة 8-7-1 وحالة السكون steudy-state equations فإن:

$$-\rho\ P_0 + P_1 \quad = 0 \qquad n = 0$$

$$-(1+\rho)\ P_n + P_{n+1} + \rho\ P_{n-1} \quad = 0 \qquad 0 < n < N$$

$$-P_N + \rho\ P_{N-1} \quad = 0 \qquad n = N$$

هذا يعني أن λ موزعة حسب توزيع بواسون أما معدل متوسط الخدمة فموزعة إما بشـكل بواسون أو التوزيع الأسي وأن عدد مؤدي الخدمة هو واحد من المعادلات الرياضية والعلاقات فـيمكن التوصل إلى:

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)P^n & , \quad \rho \neq 1 \\ & \qquad n = 0\ ,\ 1\ ,\ 2....N \\ \dfrac{1}{N+1} & , \quad \rho = 1 \end{cases}$$

علماً بأن $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ فيجب أن لا تكون أقل من الواحـد كـما في حالـة 1-7-8. فـنلاحظ هنـا أن عدد الوحدات أو العملاء في النظام منظمة بطول الصف التي تسـاوي إلى N-1 ولـيس بدلالـة λ و μ وباستخدام P_n أعلاه نجد العدد المتوقع في النظام والتي تكون مساوية إلى:

$$L_s = \begin{cases} \dfrac{\rho(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} & , \quad \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2} & , \quad \rho = 1 \end{cases}$$

ويمكن إيجاد قيمة Ls من خلال Wq و Ws و Lq خاصةً إذا كانت λ_{eff} معلومة:

$$\lambda_{eff} = \lambda\ (1 - P_N)$$

و

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{eff}} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_N)}$$

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} = L_q + \frac{\lambda(1-P_N)}{\mu}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)}$$

ملاحظة:

وكما ذكرنا سابقاً أن μ $(L_s - L_q)$ = λ_{eff} وهي مساوية إلى $\lambda(1 - P_N)$

حيث أن P_N تمثل احتمال نسبة العملاء غير المخدومة بسبب عدم استيعاب المنظومة.

أما احتمال N موجودين في النظام نسبة العملاء الموجودين في النظام والتي تكون مساوية إلى

$$P(n > N) = 1 - P_N$$

مثال (10):

Consider the car-wash facility of example 8. suppose that facility has total of 5 parking spaces. If the parking lot is full, newly arriving curs balk to seek services else where.

Solution:

هنا المسؤول في خدمة غسيل السيارات سوف ينظر إلى جانب خسارات العملات وعددهم سيكون مماثلاً إلى:

$$\lambda - \lambda_{eff} = \lambda P_N$$

وبما أن N = 5 + 1 = 6 هذا يعني أن:

$$\rho = \frac{5}{6}$$

$$P_N = \left\{ \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^7} \right\} \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.0774 \qquad N = 6$$

فإن المعدل يكون:

$$5 \times 0.0774 = 0.387 \text{ car/hour}$$

على أساس الخدمة اليومية والتي تكون 8 ساعات عمل هذا يعني أن محل غسيل السيارات يفقد بمعدل 3 عملاء (سيارات) في اليوم الواحد.

أما لحساب الزمن المتوقع للانتظار في النظام يكون:

$$Ls=\frac{\frac{5}{6}\left[1-7\left(\frac{5}{6}\right)^{6}+6\left(\frac{5}{6}\right)^{7}\right]}{\left(1-\frac{5}{6}\right)\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{7}\right)}=2.29 \quad \text{cars}$$

وأن:

$$\lambda_{eff} = \lambda\ (1 - P_6) = 5\ (1 - 0.0774) = 4.613$$

$$Ws=\frac{Ls}{\lambda_{eff}}=\frac{2.29}{4.613}=0.496 \quad \text{hour}$$

مثال (11):

محطة بنزين صغيرة بمضخة واحدة وفراغ يتسع لثلاث سيارات الأمر الذي يؤدي للسيارة الواصلة أن تذهب إلى محطة ثانية. وصول السيارات يتبع توزيع يواسون وبمعدل متوسط يساوي 8 دقائق. أما توزيع الخدمة يتبع التوزيع الأسي ومتوسط 4 دقائق. إذا توفرت فرصة للمالك لتأجير القطعة المجاورة توفر مجالاً لسيارة أخرى للانتظار وبمبلغ 100 دينار أسبوعياً (ولكنه لا يستطيع إنشاء مضخة أخرى) فإذا كان صافي الربح المتوقع 50 دينار.

ملاحظة: إن المحطة تشتغل يومياً 10 ساعات. هل إن عملية تأجير الأرض مربحة.

Solution:

نجد قيمة λ و μ

$$\lambda=\frac{60}{8}$$

$$\mu=\frac{60}{4}$$

$$\rho=\frac{1}{2}=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\frac{60}{8}}{\frac{60}{4}}=\frac{1}{2}$$

بما أن $N = 3$ فإن P_3 تساوي:

$$P_N = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^n \qquad N = 3$$

نسبة العملاء المفقودين

$$= \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.067$$

أما في المنظومة المقترحة فإذا زاد العدد إلى 4

N = 4

$P_4 = 0.032$

فإن الزيادة في عدد السيارات المخدومة في الساعة

$= \lambda\ (0.067 - 0.032) = 0.262$

أما الزيادة في عدد السيارات المخدومة في الأسبوع:

$= 0.262 \times 7 = 1.834$

أما الربح الأسبوعي يكون:

$1.834 \times 100 = 183.4$

أما الربح الأسبوعي الذي يمكن أن يحقق هو:

$50 \times 183.4 = 91.7$

بما أن هذا المبلغ أقل من 100 دينار فالأفضل أن لا يؤجر الأرض.

8-7-3 منظومة M/M/C:

في هذه المنظومة يكون الوصول بصورة عشوائية لا يمكن إحصاء عدد أفراد المجتمع القادم منه، فإن معدل الوصول يساوي λ وهناك C مؤدي الخدمة ولا توجد قيود على حجم الصف وأن الخدمة المقدمة من قبل كل قناة خدمية متماثلة مع القنوات الأخرى من حيث الأداء والكفاءة بمعدل $\frac{1}{\mu}$ وكل من معدل الوصول والمغادرة تحدث تحت توزيع بواسون.

فإن صياغة النموذج يكون على افتراض أن عدد القنوات يساوي C وكل واحدة منها تؤدي الخدمة وبمعدل $\frac{1}{\mu}$ وحسب توزيع بواسون فهناك حالتين يمكن أن تأخذ بنظر الاعتبار:

1- إذا كان عدد الوحدات أقل من عدد القنوات الخدمية $n < C$

2- إذا كان عدد الوحدات في النظام أكثر أو يساوي عدد القنوات الخدمية

$n \geq C$

ولصياغة نموذج للمنظومة M/M/C عندما تكون $n < C$ فإن معدل الوصول يكون $\lambda_n = \lambda$

أما المغادرة $\mu_n = n\mu$ أما في حالة $n \geq C$ فإن $\mu_n = C\mu$

فإن حل هذا النموذج يكون بدلالة Pn و λn و μn قيم معطاة ويكون صياغة النظام كما يلي:

P (zero arrival during h given n in system) $\cong 1 - \lambda_n h$

P (zero departure during h given n in system) $\cong 1 - \mu_n h$

فيمكن الحصول على P_n (t+h) وأن:

$$P_n^{(t+h)} \cong P_n^{(t)}(1-\lambda_n^h)(1-\mu_n^h) + P_{n-1}^{(t)}(\lambda_n h)(1-\mu_n^h)$$
$$+ P_{n+1}^{(t)}(1-\lambda_n^h)(\mu_{n+1}^h) \;, \qquad n > 0$$

$$P_0^{(t+h)} \cong P_0^{(t)}(1-\lambda_0^h).1 + P_1^{(t)}(1-\lambda_1 h)\mu_1 h \qquad n = 0$$

وباستخدام القاعدة المستخدمة في منظومة 1-7-8 وحالة steady-state equation:

$$-(\lambda_n + \mu_n) P_n + \mu_{n+1} P_{n+1} \lambda_{n-1} P_{n-1} = 0 \qquad n > 0$$

$$-\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0 \qquad n = 0$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات كما يلي:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_{n+1} = \left(\frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_{n+1}}\right) P_n - \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}}\right) P_{n-1} \qquad n > 0$$

بما أن النظام متعدد القنوات فإن أول قناة تكون مشغولة عندما تكون هناك وحدة واحدة في النظـام

أي μ_1 وهكذا بالنسبة لبقية العملاء وبذلك نستطيع كتابة P_n بالنسبة للنظام المتعدد القنوات كما يلي:

$$P_n = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\ \frac{\lambda_1}{\mu_1}\ \frac{\lambda_2}{\mu_3}\ .....\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\ P_0 \qquad n \geq 1$$

$$P_n = \frac{\lambda_0\ \lambda_1\ ....\ \lambda_{n-1}}{\mu_1\ \mu_2\ .....\mu_n}\ P_0 \qquad n \geq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=0}^{0}\ \prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$$

أما في حالة إذا كانت $n \leq C$ فإن الاحتمال P_n يكون:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu\ (2\mu)\ (3\mu)...(n\mu)}\ P_0$$

أما في حالة إذا كانت $n \geq C$ فإن الاحتمال يكون:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu\ (2\mu)...(C-1)\ \ \mu(C\mu)\ \ (\mu)...(C\mu)}\ P_0$$

(n-C) times

$$= \frac{\lambda^n}{C!\ \ C^{n-C}\ \ \mu^n}\ P_0$$

علماً بأن:

$$\lambda_n = \lambda \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n \leq C \\ C\mu & n \geq C \end{cases}$$

إذا كانت $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ فإن الاحتمال يكون:

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\rho^n}{n!}\right) P_0 & 0 \le n \le C \\ \left(\dfrac{\rho^n}{C^{n-C} C!}\right) P_0 & n > C \end{cases}$$

M/M/C

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!\ (1-\frac{\rho}{C}} \right\}^{-1}$$

بعد إيجاد الصيغة المطلوبة لـP_0 نجد الصيغ المطلوبة لعدد الوحدات في صف الانتظار Lq:

$$L_q = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!\ (C-P)} P_0 = \left(\frac{C\rho}{(C-\rho)^2}\right) P_C$$

$$L_s = L_q + \rho$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

مثال (12):

A small town is being serviced by two cab companies Each of the two company owns two cabs are known to share the market almost equally. This is evident by the fact that calls arrive at each company's dispatching office at the rate of 10 per hour. The average time per ride is 11.5 minutes. Arrival of calls follows apoisson distribution where as ride times are exponential. The two companies were recently bought by one of the city's business mean. His first action after taking over the tow companies was to try to consolidate the two companies into one dispatching office in hope that he would provide faster service for his customers.

Solution:

نجد أولاً نسبة المنفعة (نسبة الوصول في الساعة للركوب) هي:

$\lambda = 10$, $\mu = 11.5$, $C = 2$

$$100\frac{\lambda}{C\mu}=\frac{100\times 10}{2\left(\frac{60}{11.5}\right)}=95.8\%$$

نلاحظ هنا أن كل cab تقدم خدمة، فإن كلفة دمج الشركتان بمكتب واحد ليس عادلاً لأن كـل شركة لحالها تكون مشغولة (busy) كما تبين المنفعة الكثافة للاستخدام.

ولحساب المنفعة الجديدة للمالكين الجدد نحتاج إلى:

1- M/M/2 with $\lambda = 10$, $\mu = 5.217$

2- M/M/4 with one queue with

$\lambda = 2 \times 10 = 20$ calls per hour

$\mu = 5.217$ per rides

ومن الحالتين نلاحظ أن:

$$\frac{10\lambda}{C\mu}=\frac{100\times 20}{4\times 5.217}=95.8\%$$

هنا المقياسين ثابتين

أما إذا أجرينا الحسابات التالية فإن المقاييس تكون مختلفة عندما C = 2

إذا كانت $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ فإن:

$$\rho=\frac{10}{5.217}\approx 1.917$$

احتمال:

$$P_0=\left[\frac{1.917^0}{0!}+\frac{1.917}{1!}+\frac{1.917^2}{2!(1-\frac{1.917}{2})}\right]^{-1}=0.0212$$

فإن الوقت المتوقع للانتظار في الصف هو:

$$W_q=\frac{1}{10}\left[\frac{(1.917)^3\times 0.0212}{1!\ \ (2-1.917)^2}\right]=2.16 \quad \text{ساعة}$$

أما عندما C = 4 فإن λ = 20 و μ = 5.217 فإن $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3.83$ لذا:

$$P_0 = \left[\frac{383^0}{0!} + \frac{3.83}{1!} + \frac{3.83^2}{2!} + \frac{3.83^3}{3!} + \frac{3.83^4}{4!(1 - \frac{3.83}{4})} \right] = 0.0042$$

فإن W_q تختلف وتكون مساوية إلى:

$$W_q = \frac{1}{20} \left[\frac{3.83^5 \times 0.0042}{3! \ (4 - 3.83)^2} \right] = 1.05 \quad \text{ساعة}$$

مثال (13):

مركز للاتصالات الخارجية لديها 3 خطوط هاتفية يصل طالب الخدمة إلى المركز حسب توزيع بواسون وبمعدل 12 زبون في الساعة. علماً بأن زمن المكالمة تختلف من شخص إلى آخر وأن زمن المكالمة الهاتفية يتبع التوزيع الأسي السالب وبمعدل 10 دقائق لكل مكالمة هاتفية. أوجد:

1- معدل عدد الزبائن في النظام Ls

2- معدل زمن الانتظار في النظام Ws

3- احتمال وجود خط شاغر

4- احتمال وجود خط شاغر واحد على الأقل.

Solution:

هنا C = 3 بعدد الخطوط

λ = 12 معدل الوصول

$\mu = \frac{60}{10} = 6$ مكالمة هاتفية في الساعة

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{6} = 2$$

ولحساب قيمة Ls معدل عدد الزبائن المتوقع في النظام هو:

$Ls + Lq + \rho$

نحسب أولاً قيمة P_0 قبل إيجاد قيمة L_q:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!(1-\frac{\rho}{C}} \right\}^{-1}$$

$$P_0 = \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!(1-\frac{2}{3})} \right\}^{-1}$$

$$= 1 + 2 + 2 + 4 = \{9\}^{-1}$$

$$P_0 = \frac{1}{9}$$

∴ احتمال وجود ولا زبون في النظام يساوي 11% من الوقت تقريباً فإن:

$$Lq = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!(C-\rho)^2} P_0$$

$$= \frac{2^{3+1}}{(3-1)!(3-2)^2} \ . \ \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

فإن Ls معدل عدد الزبائن في النظام هو:

$$Ls = Lq + \rho$$

$$= \frac{8}{2} + 2 = 2.9 \approx 3$$ بمعدل 3 زبائن

أما لإيجاد (2) متوسط زمن الانتظار Ws

$$Ws = \frac{Lq}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\frac{8}{9}}{12} + \frac{1}{6} = 0.24$$

أما لحساب الفرع (3) احتمال وجود خط شاغر هو:

$$= 1 \ . \ P_0 + \frac{2}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \ . \ \frac{2}{1} \ . \ \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \ . \ \frac{2^2}{2!} \ . \ \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

أي 33% من الوقت يكون هناك خط شاغر.

أما احتمال خط واحد شاغر على الأقل:

$$=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

أي 55%.

8-7-4 منظومة $M_n/M_n/1$:

هذه المنظومة تعتمد على العدد n وكل من معدل متوسط الوصول أو معدل متوسط الخدمة أي μ_n و λ_n وكما هي معطاة:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda \ , & 0 \le n \le N \\ 0 \ , & n \ge N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu \ , & 0 \le n \le C \\ C\mu \ , & C \le n \le N \end{cases}$$

فيمكن حساب قيمة P_n لهذه المنظومة بعد التعويض عن λ_n و μ_n فيها حيث أن $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0 \ , & 0 \le n \le C \\ \frac{\rho^n}{C!\,C^{n-C}} P_0 \ , & C \le n \le N \end{cases}$$

وبما أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد أي أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C \left(1 - (\frac{\rho}{C})^{N-C+1} \right)}{C!(1-\frac{\rho}{C})} \right]^{-1} & , \quad \frac{\rho}{C} \neq 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!}(N-C+1) \right]^{-1} & , \quad \frac{\rho}{C} = 1 \end{cases}$$

نلاحظ هنا أن الفرق ما بين هذه المنظومة ومنظومة M/M/C هي في حسابات P_n.

فإن قيمة المعامل $\frac{\rho}{C}$ يجب أن لا تكون أقل من واحد، فإن:

$$L_q = \begin{cases} P_0 \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!(C-\rho)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C} - (N-C)\left(\frac{\rho}{C}\right)^{N-C}\left(1-\frac{\rho}{C}\right) \right\} & , \quad \frac{\rho}{C} \neq 1 \\ P_0 \frac{\rho^C (N-C)(N-C+1)}{2C!} & , \quad \frac{\rho}{C} = 1 \end{cases}$$

$$Ls = Lq + (C - \bar{C}) = Lq + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

حيث:

$\bar{C}$ = العدد المتوقع للخدمة

$$= \sum_{n=0}^{C} (C-n) P_n$$

$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - P_N) = \mu(C - \bar{C})$$

مثال (14):

In the consolidated cab company problem (Example 12), although the owner realizes that the expected waiting time is excessive, he is unable to obtain funds for purchase of additional cabs. To reduce the excessive waiting time, he instructed the dispatching office to apologize to prospective customers for the unavailability of cabs once the wiating list reaches 16 customers.

Solution:

نلاحظ هنـا أن عـدد العمـلاء في النظـام هـو 16 ومـن وجهـة نظـر المالـك أن waiting time

مساوية إلى 4 + 16 والمساوية إلى 20 عميل. وبما أن الشركة لديها 4 تكاسي فإن:

$\lambda = 20$ per hour

$\mu = 5.217$ per hour

فيمكن إيجاد قيمة Wq كما يلي:

$$P_0 = \left\{ 1 + 3.83 + \frac{(3.83)^2}{2!} + \frac{(2.83)^3}{3!} + \frac{(3.83)^4 \left(1 - \frac{(3.83)^{17}}{4} \right)}{4! \left(1 - \frac{3.83}{4} \right)} \right\} = 0.00753$$

$$L_q = 0.00735 \frac{(3.83)^5}{3!(4-3.83)^2} \left[1 - \left(\frac{3.83}{4} \right)^{16} - 16 \left(\frac{3.83}{4} \right)^{16} (1 - \frac{3.83}{4}) \right] = 5.85$$

علماً بأن:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5.217} = 3.83$$

وكما أن:

$$P_{20} = \frac{(3.83)^{20}(0.00753)}{4!(4^{16})} = 0.03433$$

فيمكن حساب λ_{eff} كما يلي:

$\lambda_{eff} = \lambda (1 - P_{20}) = 20 (1 - 0.03433) = 19.31$

وبعدها يمكن إيجاد Wq:

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda_{eff}} = \frac{5.85}{19.31} = 0.303 \text{ hour}$$

نلاحظ هنا أن وقت الانتظار انخفض من Wq = 1.05 إلى Wq = 0.303

8-7-5 منظومة -/-/M_n/M_n :Self Service Model

في هذه المنظومة عدد مقدمي الخدمة غير محدود لأن العميل يخدم نفسـه بنفسـه ويعتمـد معدل متوسط الوصول أو معدل متوسط الخدمة أو كليهما على العدد n في المنظومة فإن:

$$\lambda_n = \lambda \qquad \text{for all} \quad n \geq 0$$

$$\mu_n = n\mu \qquad \text{for all} \quad n \geq 0$$

فيمكن حساب الاحتمالات n لهذه المنظومة أي إيجاد P_n كما يلي:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 = \frac{\rho^n}{n!} P_0 \qquad \text{if} \quad n < c$$

$$P_n = \frac{\rho^n}{C!} \cdot \frac{1}{C^{n-C}} P_0 \qquad \text{if} \quad n \geq c$$

وبما أن مجموع الاحتمالات يساوي إلى الواحد. أي $\sum_{n=0}^{\infty} Pn = 1$

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots\ldots} = \frac{1}{e^P} = e^{-\rho}$$

$$P_n = \frac{e^{-P}\rho^n}{n!} \quad , \quad n = 0\,,\,1\,,\,2\,\ldots..$$

هذا يمثل توزيع بواسون بوسط حسابي مساوي إلى ρ = E(n)

ومنها يمكن حساب ما يلي:

$$Ls = E(n) = \rho$$

$$Ws = \frac{1}{\mu}$$

$$Lq = Wq$$

ومن أعلاه إذا كان العميل أو الزبون يخدم نفسه الخدمة الدائنية فإن Wq = 0 لذا مـن هنـا نرى أن:

$$Ws = \frac{1}{\mu}$$

ويمكن حساب قيمة $P_n^{(t)}$ لهذا النموذج كما يلي:

$$P_n^{(t)} = \frac{e^{-\alpha} \alpha^n}{n!} \qquad n = 0 , 1 , 2 \ldots.$$

Where $\alpha = \rho \ (1 - e^{-\mu_t})$

وهذا يمثل توزيع بواسون بوسط:

$$\alpha = E\left(\frac{n}{t}\right)$$

أسئلة الفصل الثامن

1- Customers arrive at a facility according to poisson distribution at the rate of two an hour. Find the following:

a) The average number of customers arriving in an 8 hour period.

b) The probability that there will be at least one customer in 1- hour period.

2- Customers arrive at a restarant according to poisson distribution at the rate of 20 per hour. The restaurant opens for business at 11.00 AM Find:

a) The Probability of having 20 customer in the restaurant at 11:12 A.M given that there were 18 at 11.07 AM.

b) The probability a new customer will arrive between 11.28 and 11.30 AM given that the last customer arrived at 11:25 AM.

3- Books periously ordered arrive at university libarary a ccording to a poisson distribution at the rate of 25 books per day. Each shelf in the stacks can hold 100 books. Determine:

a) The expected number of shelves that will be stacked with new books each month.

b) The probability that more than 10 book cases will be needed each month given that a book case has five shelves.

4- An air port terminal services three types of customers, those arriving from rural areas, those arriving from suburban areas, and the transit customers whe are changing planes at the airport, the arrivals distribution for each of the three groups is assumed poisson with mean arrival rates 10, 5 and 7 per hour, respectively. Assuming that all customers require the same type of service at terminal and that the services time is exponential with mean rate 10 per hour, how many counters should be provided at the terminal under each of the following conditins?

a) The expected waiting time in the system per customer time in the system per customer does not exceed 15 minutes.

b) The expected number of customers in the system is at most 10.

c) The probability that all customers are idle does not exceed 11.

5- In a bank customers arrive in a poisson stream with mean 36 per hour. The service time per customer is exponential with mean 0.35 hour.

Assuming that the system can a ccommodate at most 30 customers at a time, how many tellers should be provided under each of the following conditions?

a) The probability of having more than 3 customers waiting is less than 20.

b) The expected number in the system does not excced?

المراجع

References

1- Bazaraa, M.J. Jarris, and M. Sherali; "Linear Programming and Network Flows" 2nd ed. Wiley, New York 1990.

2- Bradley. S, A. Hax and T. Magnanti; "Applied Mathematical Programming" Addison-Wesley 1977.

3- Dantzig G. And M. Thapa, "Linear Programming" Springer New York 1997.

4- Hamdy A. Taha; "Operations Research" 1th edition, Prentice Hall international editions 2003.

5- Lipsky, L, "Queuing Theory" Macmillan New York 1992.

6- Nemhauser, G and L. Wolsey "Integer and Combinatorial Optimization" Wiley New York 1988.

7- Paul N. Loomba "Linear Programming An Introductory Analysies" Tata McGraw Hill Publishing Company, Ltd Newdelhi.

8- Tijms. H. C. "Stochastic Models. An Algorithmic Approach" Wiley New York 1994.

9- William, H "Model Building in Mathematical Programming" 3rd ed Wiley New York 1990.

10- Wolsey L. "Integer Programming" Wiley New York 1998.

New in Quantitative Approach
& Operations Research

المؤلف في سطور :

الدكتورة سهيلة عبدالله سعيد

-ولادتها السليمانية

-دكتوراة في الإحصاء/ بحوث عمليات انجلترا.

-بكالوريوس إحصاء - بغداد.

-الإختصاص العام :الإحصاء التطبيقي .

-الإختصاص الدقيق :بحوث عمليات .

-أستاذ مشارك / جامعة عمان الأهلية .

-أستاذ مشارك / (أستاذ مساعد) جامعة بغداد.

-له بحوث في جميع المجالات الإقتصادية والإحصاء والإدارية ومن ضمنها في جانب المدخلات-المخرجات ومن مؤلفاته أيضاً.

١- الإحصاء للإداريين والإقتصاديين.

٢-الرياضيات بين النظرية والتطبيق.





الأردن-عمان

هاتف: 5231081 فاكس: 96265235594+

ص.ب:366 عمان 11941 الأردن

E-mail:dar_alhamed@hotmail.com





الأردن-عمان

شارع الجمعية العلمية الملكية - المبنى الإستثماري الأول للجامعة الأردنية

هاتف: 5338656 فاكس:96265348656+

ص . ب : 1147 عمان - الجبيهة

Email:dar_alraya@yahoo.com

